MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 2: Más cositas de matrices

28 de agosto de 2023

P1. Una cortita para no perder las costumbres. Considere la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule su inversa.

P2. Otro sistema paramétrico. Sea el siguiente sistema lineal:

$$\begin{gathered} a + 2b + c + 3d = 1 \\ a + 3b + c + (3-\alpha)d = \alpha \\ a + c + (\alpha+5)d = \beta \\ a + 3b + 2c + 3d = 2\alpha + 4 \end{gathered}$$

Estudie existencia y naturaleza de las soluciones segun los valores de los parámetros α, β. Resuelva para el caso $\alpha = \beta = 1$

P3. Idempotentes. Una matriz P se dice idempotente si cumple: $P^2 = P$. Dado eso, demustre que:

a) Si P es idempotente, entonces:
$$\forall k \in \mathbb{N} : P^k = P$$

b) Si $A = (I - P)$, con P idempotente, entonces A es idempotente.

c) **Propuesto:** Si dos matrices A, B son tales que $A = AB \wedge B = BA$, entonces A y B son idempotentes.

P4. Me llaman el inversionista.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible , tal que cumple:

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Muestre que $A^{-1} = -A - 3I$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible y tal que $B^3 = 0$. Definimos, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

Demuestre que:

(i) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(ii) $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(iii) $M(\lambda)$ es invertible y $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$ (Hint, analice $M(0)$)