MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 3: Compactificación característica

7 de septiembre de 2023

P1. [P3 C1 2023-1]. Sea A una matriz de 2 columnas y B otra matriz pero de 2 filas. Consideremos el conjunto U definido como:

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AMB = 0 \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Pruebe que U es subespacio vectorial de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) Suponiendo que $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dé una base de U y calcule su dimensión.

P2. [P2 C1 2021-2].

a) Considere $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ vectores fijos y definamos

$$W = \{M \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : Mv = u\},$$

el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ que satisfacen $Mv = u$. Pruebe que W es un subespacio vectorial de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si y solo si $u = \mathbf{0}$, el vector cero de $\mathbb{R}^m$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, determine si existe un $w \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\langle \{w\} \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hint: Para ello le puede ser útil probar que $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

P3. [P1 C1 2021-1]. Sea E el conjunto de polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales que verifican:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad \text{y} \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0.$$

a) Pruebe que E es un espacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$, encuentre una base *y* de su dimensión.

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

c) Considere ahora

$$F = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_2 = 0\}$$

(i) Pruebe que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, encuentre una base, y dé su dimensión.

(ii) Pruebe que $E \cap F$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, encuentre una base, y dé su dimensión.