Pauta Auxiliar #6 Lineal

P1 Tenemos el e.v: $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p'(1) = 0\}$

Esto es: si $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(1) = a + b + c + d = 0$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p'(1) = 3a + 2b + c = 0$

$\Rightarrow d = 2a + b$
$c = -3a - 2b$

$\Rightarrow (\#) \left[p(x) = a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) \right]$

$\hookrightarrow$ Forma de los elementos de U.

a) Base y dim de U.

Tomando $(\#)$ en cuenta, tenemos que

$\{\underbrace{x^3 - 3x + 2}_{\text{"}p_1\text{"}}, \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{"}p_2\text{"}}\}$ sí o sí es generador de U

Pues todo $p \in U$ se escribe como c.l. de p_1 y p_2.

Aparte son l.i. pues, sean $a, b \in \mathbb{R}$ t.q.

$a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow ax^3 = 0 \cdot x^3 \quad \wedge \quad b \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$

(igualdad de polinomios)

$\Rightarrow a = b = 0$ // Luego $\dim(U) = 2$
pues tenemos base de cardinal 2.

b) Idea: queremos escribir todo $p \in P_3(\mathbb{R})$ como c.l. de p_1, p_2, y otras cosas.

TIP: siempre se pueden usar bases canónicas para extender conjuntos l.i. a bases de un espacio completo.

Veremos que

$\{p_1, p_2, x, 1\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

Sea $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= ax^3 + bx^2 + cx + d - 3ax + 3ax + 2a - 2a - 2bx + 2bx + b - b$

$= a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) + (c + 3a + 2b)x + (d - 2a - b) \cdot 1$

lo cual es la c.l. buscada. Así, vemos que $\{p_1, p_2, x, 1\}$ es un generador de cardinal 4 de un espacio de dimensión 4, luego, es una base*.

* Si esto no lo han visto, avísenme para subir demostración.

c) $W = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : p''(0) = 0\}$

Veamos que si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow p''(x) = 6ax + 2b$, luego, $p''(0) = 2b = 0$

$\Rightarrow b = 0$. Luego: $p(x) = ax^3 + cx + d$. $(\ast)$

, con lo que $\{x^3, x, 1\}$ son base de W
↳ generan por $(\ast)$ y son l.i. pues son subconjunto de la base canónica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y subconjunto de l.i. es l.i.

así, $\dim(W) = 3$

d) Sea $p \in U \cap W$. Veamos que:

$p(1) = p'(1) = 0 = p''(0)$

De lo visto en a) y c), esto es, que si $p \in U \cap W$:

y: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} d &= 2a + b \\ c &= -3a - 2b \\ b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d &= 2a \\ c &= -3a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Luego: $p(x) = ax^3 - 3ax + 2a = a(x^3 - 3x + 2)$

Así $\{x^3 - 3x + 2\}$ genera $U \cap W$, y es un singleton no cero, luego, es l.i., así, es base.

Con eso: $\dim(U \cap W) = 1$

e) Claramente tenemos que

- $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \supseteq U+W$ pues $u+w \in U+W$ es suma de polinomios de grado ≤ 3, i.e., es polinomio de grado ≤ 3.

Veamos $\boxed{\subseteq}$. Sea $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Queremos hacer aparecer a p_1 y p_2 → NIKITA Nipone.

$= ax^3+bx^2+cx+d - 3ax + 3ax + 2a - 2a - 2bx + 2bx + b - b$

$= a(x^3-3x+2) + b(x^2-2x+1) + (c+3a+2b)x + (d-2a-b)$

Luego sea $u = ap_1 + bp_2 \in U$

$w = (c+3a+2b)x + (d-2a-b) \in W$

$p = u+w$, con lo que $p \in U+W$.

f) Ya encontramos una escritura, ahora debemos encontrar $\tilde{u} \neq u$, $\tilde{w} \neq w$ tq $\tilde{u}+\tilde{w} = p$.

Consideremos otra forma de "desarmar" p:

$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d = ax^3+bx^2-2bx+b+cx+d+2bx-b$

$= \underbrace{b(x^2-2x+1)}_{\in U} + \underbrace{ax^3+(c+2b)\cdot x+(d-b)\cdot 1}_{\in W}$

Con lo que encontramos $\tilde{u} = b(x^2-2x+1) \in U$

$\tilde{w} = ax^3+(c+2b)x+(d-b)\cdot \in W$

tq $p = \tilde{u}+\tilde{w}$ y $\tilde{u} \neq u$, $\tilde{w} \neq w$.

Luego la escritura de p como elemento de $U+W$ no es única.

g) Vimos en d) que $U \cap W \neq \{0\}$, luego, la suma NO es directa.

P2 a) Tenemos que chequear:

(i) $V \neq \phi$

(ii) $V \subseteq \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$

(iii) carac. completa.

(i) en efecto $0 \in V$ pues

$\forall k \in \{0, \dots, m\}$ $a_k = 0 = a_{m-k}$.

(ii) Directo de la def de V

(iii) Sean $p_1, p_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. PDQ $p_1 + \lambda p_2 \in V$

En efecto: digamos

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i \quad ; \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x^i$$

$$(p_1 + \lambda p_2)(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + \lambda b_i)\, x^i .$$

y vemos que sea $k \in \{0, \dots, m\}$, consideremos el k-ésimo coeficiente de $p_1 + \lambda p_2$:

$a_k + \lambda b_k$ $\begin{cases} \text{Como } p_1 \in V : & a_k = a_{m-k} \\ \text{Como } p_2 \in V : & b_k = b_{m-k} \end{cases}$

$\Rightarrow a_k + \lambda b_k = a_{m-k} + \lambda \cdot b_{m-k} \longrightarrow$ "$m-k$"-ésimo coef. de $p_1 + \lambda p_2$

Luego por def. de V: $p_1 + \lambda p_2 \in V$.

b) Por cómo está definido V es natural postular la sgte base:

$$p_i(x) = \begin{cases} x^i + x^{m-i} & \text{si } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ x^n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Es decir la familia dada por

$$B_1 = \{ \underbrace{1 + x^m}_{i=0}, \underbrace{x + x^{m-1}}_{i=1}, \underbrace{x^2 + x^{m-2}}_{i=2}, \dots, \underbrace{x^{m-n+1} + x^{m-n-1}}_{i=n-1}, \underbrace{x^n}_{i=n} \}$$

Veamos que es base de V.

Primero, vemos que B_1 es l.i.:

Sean $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x^i + x^{m-i}) + \lambda_n \cdot x^n = 0$$

Igualando monomio a monomio para $k \in \{0, \dots, n\}$ → igualdad de polinomios
tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 \cdot x^0 = 0 \cdot x^0 \\ \lambda_1 \cdot x^1 = 0 \cdot x^1 \\ \vdots \\ \lambda_n x^n = 0 \cdot x^n \end{array}\right\} \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow B_1$ es l.i.

Veamos que genera. En efecto sea $p \in V$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \dots$$
$$+ a_1 x^{m-1} + a_0 \cdot x^m$$

$$= a_0 (1 + x^m) + a_1 \cdot (x + x^{m-1}) + \dots + a_{n-1} (x^{n-1} + x^{n+1})$$
$$+ a_n \cdot x^n \in \langle B_1 \rangle$$ Luego B_1 genera V

Así, B_1 es base de V, luego $\dim(V) = n+1$.

c) Para ver que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \oplus V$ debemos ver:

- $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \cap V = \{0\}$. En efecto si consideramos $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ como s.e.v. de $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in V \cap \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \in \{n, \dots, m\} \text{ pues } gr(p) \leq n-1.$$

Pero $p \in V$, luego $a_k = 0 \Rightarrow a_{m-k} = 0 \ \forall k \in \{n, \dots, m\}$

Luego, $\forall k \in \{0, \dots, m\}$ $a_k = 0$. i.e. $p(x) \equiv 0$.

Ahora, queremos ver que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) + V$.

En efecto sea $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$: $p(x) = \sum_{i=0} a_i \cdot x^i$.

Queremos encontrar $f_1 \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $f_2 \in V$ tq

$f_1 + f_2 = p$. Consideremos f_2 como:

$f_2(x) = a_m x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \cdot 1$.

Tenemos que para $k \in \{n, \dots, m\}$ los coeficientes de f_2 son los que queremos que sean.

Ahora usamos f_1 para "corregir" lo que nos falta.

Queremos $f_1 = p - f_2$. Por cómo construimos f_2:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \cdot x^k & \text{si } k \geq n \\ (a_k - a_{m-k}) x^k & \text{si } k < n \end{cases}$$

Notar $f_1 \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$

Luego si $f_1(x) = (a_0 - a_m) + (a_1 - a_{m-1}) x + \dots + (a_{n-1} - a_{n+1}) x^{n-1}$

tenemos lo pedido, pues $f_1 \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $f_2 \in V$ $\wedge$ $f_1 + f_2 = p$.

d) Ahora considerando

$$V' = \{ p = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) : a_k = -a_{m-k} \ \forall k \}$$

PDQ $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$. Veamos que $V \cap V' = \{0\}$

En efecto sea $p \in V \cap V'$: tenemos que:

- $p \in V \Rightarrow a_k = a_{m-k} \ \forall k$
- $p \in V' \Rightarrow a_k = -a_{m-k}$

$\Big\}$ $a_k = -a_k \ \forall k$

$\Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$.

Veamos que $P_m(\mathbb{R}) = V + V'$. En efecto, sea $p \in P_m(\mathbb{R})$

Queremos, dado $p(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k$, encontrar

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k + x^{m-k})\,\tilde{a}_k + x_0^n\, a_n \in V$$

$p_2(x) \in V'$ tales que $p_1 + p_2 = p$.

Estudiemos V'. Ocupando la condición de V' para $k = n$:

$$a_n = -a_{m-n} \quad \text{como } m = 2n:$$

$$\Rightarrow a_n = -a_n \Rightarrow a_n = 0$$ → el término de exponente n siempre va con cero.

Luego, tenemos: si $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\begin{cases} \tilde{a}_k + a_k = b_k \\ \tilde{a}_k - a_k = b_{m-k} \end{cases} \wedge \quad \tilde{a}_n = b_n$$

Luego tenemos $m+1$ ecuaciones y $m+1$ incógnitas:

$$\Rightarrow \tilde{a}_k = \frac{b_k + b_{m-k}}{2} = \tilde{a}_{m-k} \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$a_k = \frac{b_k - b_{m-k}}{2} = -a_{m-k} \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$a_n = b_n$$

Lo cual nos entrega los p_1 y p_2 pedidos

Así, probamos lo pedido //

P3 a) En efecto:

- $\vec{0} \in A(V)$ pues $A \cdot \vec{0} = \vec{0}$ y $\vec{0} \in V$.
- Claramente $A(V) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Ocupemos caract. compacta. sean $w, z \in A(V)$ $\lambda \in \mathbb{R}$:

PDQ $w + \lambda z \in A(V)$ en efecto:

$w \in A(V) \Rightarrow \exists x \in V$ tq $Ax = w$
$z \in A(V) \Rightarrow \exists y \in V$ tq $Ay = z \Rightarrow A\lambda y = \lambda Ay = \lambda z$.

Luego:
$$w + \lambda z = Ax + A\lambda y = A(x + \lambda y)$$

Como V es e.v. $x + \lambda y \in V$. (pues $x, y \in V$)

Luego $w + \lambda z \in A(V)$ ∎

b) $\Rightarrow$] Supongamos A invertible. PDQ $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

- Sea $z \in A(W) \cap A(V)$: $\exists v \in V, w \in W$ tq

$z = Av = Aw \Leftrightarrow A(v - w) = 0$ $/ A^{-1}$.

$v - w = 0 \Leftrightarrow v = w \Leftrightarrow v = w \in V \cap W$,

pero $V \oplus W = \mathbb{R}^n \Rightarrow V \cap W = \{0\}$

Así: $v = w = 0$ es decir $A(W) \cap A(V) = \{0\}$

- Sea $x \in \mathbb{R}^n$: Buscamos $y \in A(V)$, $z \in A(W)$ tq $y + z = x$. Sean $v \in V$; $w \in W$ tq $y = Av$; $z = Aw$:

$Av + Aw = x$

$A(v + w) = x$

Luego tomando $v \in V$, $w \in W$ tq $v + w = A^{-1}x$ (los cuales existen pues $A^{-1}x \in \mathbb{R}^n = V \oplus W$)

tenemos $A(v + w) = AA^{-1}x = x$ lo cual nos da que $\mathbb{R}^n \subseteq A(V) + A(W)$ luego, $\mathbb{R}^n = A(V) \oplus A(W)$ //

$\Leftarrow$) PDQ A invertible, suponiendo $\mathbb{R}^n = A(V) \oplus A(W)$.

En efecto recordemos que:

A invertible $\Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $Ax = y$ tiene solución única.

Por lo que probaremos esto: Sea $y \in \mathbb{R}$:

Como $\mathbb{R}^n = A(V) + A(W)$ $\exists$ $v \in V, w \in W$ tq

$y = Av + Aw = \underbrace{A(v+w)}_{\text{"}x\text{"}}$, es decir, siempre existe solución.

Veamos que es única: sean $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $y \in \mathbb{R}^n$ tq

$Av_1 + Aw_1 = Av_2 + Aw_2 = y$

$\Leftrightarrow$ $A(v_1 + w_1) = A(v_2 + Aw_2) = y$

Sean $a_1 = Av_1 \in A(V)$ $a_2 = Av_2 \in A(V)$
$b_1 = Aw_1 \in A(W)$ $b_2 = Aw_2 \in A(W)$.

Notemos: $y = \underset{\in A(V)}{a_1} + \underset{\in A(W)}{b_1} = \underset{\in A(V)}{a_2} + \underset{\in A(W)}{b_2}$

Como $y \in \mathbb{R}^n = A(V) \oplus A(W)$ entonces su escritura como suma de elementos de $A(V)$ y $A(W)$ es única. Así:

$$Av_1 = a_1 = a_2 = Av_2 \in A(V)$$
$$Aw_1 = b_1 = b_2 = Aw_2 \in A(W)$$

Así, si probamos $v_1 = v_2$ y $w_1 = w_2$ obtenemos lo pedido. En efecto:

Sean $B_1 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ base de V

$B_2 = \{c_1, \ldots, c_m\}$ base de W.

Sabemos $B_1 \cup B_2$ base de $\mathbb{R}^n$.

Ahora notemos que

$AB_1 := \{Ab_1, \dots, Ab_k\} \subseteq A(V)$ y

$AB_2 := \{Ac_1, \dots, Ac_m\} \subseteq A(W)$.

Además $\langle AB_1 \rangle = A(V) \wedge \langle AB_2 \rangle = A(W)$

pues: sea $z \in A(V)$:

$\exists v \in V$ tq $Av = z$. y: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tq
$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_k \cdot b_k$.

$z = Av = A(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_k b_k)$

$= \lambda_1 A b_1 + \dots + \lambda_k A \cdot b_k \in \langle AB_1 \rangle$

(para $A(W)$ es análogo). Luego tenemos que

$|AB_1| \leq |B_1| \wedge |AB_2| \leq |B_2|$

y así: $|AB_1| \geq \dim(A(V))$
$|AB_2| \geq \dim(A(W))$

De esto, vemos que (propuesto. Hint: contradicción)

$\dim(A(V)) = |AB_1| = |B_1| = \dim(V)$

$\dim(A(W)) = |AB_2| = |B_2| = \dim(W)$

Con lo que AB_1 es base de $A(V)$, AB_2 base de $A(W)$
con ello, si $v_1, v_2 \in V$ son tales que:

$Av_1 = Av_2 = \sum_{i=1}^{k} \beta_i A \cdot b_i$

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot A \cdot b_i \Rightarrow \lambda_i = \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$\Rightarrow v_1 = v_2$ (y lo mismo para W)

$\Rightarrow$ La solución de $Ax = y$ es única $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ A invertible.