

MA1102 Álgebra lineal

Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda



Auxiliar 8: Rango de una matriz y forma normal de Hermite

6 de noviembre de 2023

P1. Respetemos los rangos. Probar que $r(AB) \leq r(A)$ y por lo tanto $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

P2. Útil para la vida. Deduzca la forma explícita del determinante de una matriz de 3×3 .

P3. Cómo así socio. Calcule los rangos y las formas normales de Hermite de las siguientes matrices.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

P4. Como andar en bici. Si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $n > 2$, probemos por inducción que el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k + \lambda^n \right)$$