

MA1102 Álgebra lineal

Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda



Auxiliar 10: Multiplicidades de valores propios.

20 de noviembre de 2023

P1. Los parámetros no se van. Considere la siguiente matriz, para $a \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine para qué valores de a la matriz B es diagonalizable.

P2. Los clásicos nunca mueren. Sea la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores propios de B , sus multiplicidades algebraicas y geométricas, y sus vectores propios.

P3. Tres por el precio de uno. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable. Pruebe que A^2 , $A^T y I + A$ son diagonalizables y encuentre sus valores propios, considerando que los de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

P4. Truco para la vida. Considere A una matriz cuadrada, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ un valor propio de A . El objetivo de esta pregunta es probar que:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda_0) \leq \alpha_A(\lambda_0) \leq n$$

a) Pruebe las desigualdades:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda_0) \quad \wedge \quad \alpha_A(\lambda_0) \leq n$$

b) Sea $\gamma = \gamma_A(\lambda_0)$. Considere una base $\beta_{\lambda_0} = \{v_1, \dots, v_\gamma\}$ de $W_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I)$. Extienda dicha base a una base $\beta = \{v_1, \dots, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz representante de $T(x) = Ax$, con respecto a la base β . Es decir, $M_{\beta\beta}(T)$.

c) Muestre que $\gamma_A(\lambda_0) \leq \alpha_{M_{\beta\beta}(T)}(\lambda_0)$ y que $\alpha_{M_{\beta\beta}(T)}(\lambda_0) = \alpha_A(\lambda_0)$. Concluya.