Pauta Auxiliar #15.

P1 En general, para escribir una función real a forma cuadrática ($x^T A x$), se deben seguir los siguientes pasos:

1.- Desarrollar la expresión hasta llegar a una forma de tipo

$$f(x) = \sum_{i \neq j \leq n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot x_i^2$$

(es decir, una expresión polinomial de grado 2 de "n" variables).

2.- Teniendo esto la matriz A que determina la forma cuadrática tendrá la siguiente forma:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{2} \left(= \dfrac{a_{ji}}{2}\right) & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

notar que esto es consistente con que A debe ser simétrica.

Por otro lado, es importante recordar que las siguientes nociones son equivalentes:

1) A es una matriz definida positiva.
2) A tiene sus valores propios estrictamente positivos.
3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T A x > 0$$

Con esto:

a) $-2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + 5x_2^2$

Vemos que esta expresión ya tiene forma explícita de polinomio:

Con esto: $a_{11} = -2$ $\quad a_{22} = 5 \quad a_{12} = \frac{-1}{2} = a_{21}$

Así: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1/4 \\ -1/4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $x_1(2x_1 - x_2) + x_2(3x_1 + x_2)$ Debemos hacer manejo algebraico con la expresión.

$2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_2 + x_2^2$

$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ Con esto:

$a_{11} = 2 \quad ; \quad a_{22} = 1 \quad ; \quad a_{12} = a_{21} = 2$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3$ Notamos que:

$x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 = x_1^2 + 0 \cdot x_2^2 + 0 \cdot x_3^2 + 0 \cdot x_2x_3 + x_1x_3 - x_1x_2$

$\Rightarrow a_{11} = 1 \; ; \; a_{22} = 0 \; ; \; a_{33} = 0 \; ; \; a_{12} = a_{21} = -1$

$a_{13} = a_{31} = 1 \quad ; \quad a_{23} = a_{32} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $(x_1+x_2)^2 - (x_1+x_3)^2$ Desarrollamos la expresión:

$$\hookrightarrow = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_3 - x_3^2$$

$$= x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

$\Rightarrow a_{11} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{33} = -1$; $a_{12} = a_{21} = 2$

$a_{13} = a_{31} = -2$; $a_{23} = a_{32} = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

P5 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, $v \in \mathbb{R}^n$.

a) PDQ v es $\vec{vp}$ de A $\Leftrightarrow$ v es $\vec{vp}$ de $I-A$

En efecto, usando sólo equivalencias:

v $\vec{vp}$ de A $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $Av = \lambda v$ $/ \cdot -1$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $-\lambda v = -Av$ $/ + v\ (= I \cdot v)$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $v - \lambda v = v - Av$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $(1-\lambda) v = (I-A) v$

$\Leftrightarrow$ v es $\vec{vp}$ de $I-A$ con vp asociado $\tilde{\lambda} = 1-\lambda$

Con lo que tenemos todo lo pedido.

b) Ocuparemos que: sea B simétrica real

B es definida positiva ssi todos sus vp's son estrictamente positivos

Con esto y usando sólo equivalencias:

$I - A$ es def. positiva

$\Leftrightarrow$ $\forall \tilde{\lambda}$ vp de $I-A$ $\tilde{\lambda} > 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall \lambda$ vp de A $1-\lambda > 0$

por P5 a)

$\Leftrightarrow$ $\forall \lambda$ vp de A $\lambda < 1$

Con lo que probamos lo pedido $\blacksquare$

P2 a) Comencemos del lado derecho:

$$(x-x_0)^T A (x-x_0) - x_0^T A x_0 + c$$

$$= x^T A x - x_0^T A x - x^T A x_0 + \cancel{x_0^T A x_0} - \cancel{x_0^T A x_0} + c$$

$$= x^T A x - x_0^T A x - x^T A x_0 + c$$

Aplicamos la def. de x_0 $\left(= \frac{1}{2} A^{-1} b\right)$ (*)

Punto importante: A definida positiva $\Rightarrow$ sus vp's son todos estrictamente positivos

$\Rightarrow$ A es invertible.

Luego x_0 está bien definido.

Aplicando (*):

$$= x^T A x - \frac{1}{2} b^T (A^{-1})^T A x - x^T A \frac{1}{2} A^{-1} b + c$$

y: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ donde lo primero se cumple siempre, y lo 2° es por A simétrica.

$$(\cdots) = x^T A x - \frac{1}{2} b^T x - \frac{1}{2} x^T b + c$$

y: $b^T x = \langle b, x \rangle = \langle x, b \rangle = x^T b$. Luego:

$$(\cdots) = x^T A x - b^T x + c$$ con lo que probamos lo pedido

b) En efecto: PDQ $f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x$ Veamos que:

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^T A (x-x_0) - \cancel{x_0^T A x_0} + \cancel{c}$$
$$- \underbrace{\cancel{(x_0 - x_0)^T A (x_0 - x_0)}}_{0} + \cancel{x_0^T A x_0} - \cancel{c}$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^T}_{\text{"}v^T\text{"}} A \underbrace{(x-x_0)}_{\text{"}v\text{"}} = v^T A v \geq 0$$ pues A es def. positiva.

Más aún, bajo el mismo argumento, la igualdad se tiene ssi
$v = 0$; esto es, $x = x_0$

Con lo que probamos lo pedido.

P4 Calcule la descomposición de Cholesky de la sgte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6i & 0 \\ -6i & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 52 \end{pmatrix}$$

Para la descomposición de Cholesky L de una matriz A basta seguir la sgte formula:

(1) Entradas de la diagonal:

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k<i} L_{ik} \cdot \overline{L_{ki}}}$$

(2) Otras entradas: (para $i > j$) (para $i < j$ es despreciable).

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k<j} L_{ik} \cdot \overline{L_{kj}} \right)$$

Se procede por columna, comenzando por la entrada de la diagonal.

Así, en nuestro caso:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = 2$$

$$L_{21} = \frac{1}{L_{11}} \cdot A_{21} = \frac{1}{2}(-6i) = -3i$$

$$L_{31} = \frac{1}{L_{11}} A_{31} = \frac{1}{2} 0 = 0$$

$$L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}\overline{L_{21}}} = \sqrt{10 + 9i^2} = 1$$

$$L_{32} = \frac{1}{L_{22}} \left(A_{32} - L_{31}\overline{L_{21}} \right) = \frac{1}{1}(6 - 0 \cdot 3i) = 6$$

$$L_{33} = \sqrt{A_{33} - L_{31}\overline{L_{31}} - L_{32}\overline{L_{32}}} = \sqrt{52 - 0^2 - 6^2}$$

$$= 4$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3i & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$