Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Semestre Otoño
MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

CONTROL 3 (PAUTA)

(Duración: 3h)

P1. (6.0 puntos) Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Calcule la serie de Fourier de f.

sol: La serie de Fourier de una función se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

donde los coeficientes a_n y b_n se calculan de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$ 0.3 pt.

Es importante notar que si la función f es esencialmente impar, entonces $a_n = 0$ para todo n. 0.3 pt. Además, el coeficiente b_n puede simplificarse aún más. Consideremos el caso cuando b_n se calcula para n impar:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(nx)\, dx$$

Integrando y evaluando los límites, obtenemos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left. \frac{-\cos(nx)}{n} \right|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$$

Observamos que cuando n es par, $\cos(n\pi) = 1$, por lo que $b_n = 0$. Por otro lado, cuando n es impar (es decir, $n = 2k - 1$ para algún entero k), $\cos(n\pi) = -1$, lo que nos da

$$b_n = \frac{1 - (-1)}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}$$ 0.5 pt.

Entonces, podemos expresar la serie de Fourier simplificada como

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$ 0.4 pt.

b) (1.5 puntos) Use la identidad de Parceval para calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Sol: La identidad de Parseval establece que para una función $f(x)$ con su correspondiente serie de Fourier, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right)$$ 0.5 pt.

En nuestro caso particular, tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Y al reemplazar en la identidad de Parseval, obtenemos:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}$$ 0.5 pt.

Por lo tanto, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

De esta forma, podemos concluir que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ 0.5 pt.

c) (1.0 puntos) Calcule el valor de la Serie de Fourier para $x = 0$.

sol: En $x = 0$, la función $f(x)$ es discontinua, por lo tanto, la serie de Fourier en ese punto se calcula como: 0.5 pt.

$$S_f(0) = \frac{1}{2} \left(f(0^-) + f(0^+) \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$ 0.5 pt.

d) (1.0 puntos) Sea $S_n(x)$ la suma parcial enésima de la serie de Fourier de f, para $N = 2n + 1$ impar, es decir:

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots + \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} \right].$$

Muestre que:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin(u)} \, du.$$

Ayuda: Use que $\dfrac{\sin(ku)}{k} = \displaystyle\int_0^x \cos(ku) \, du$ y la identidad trigonométrica $\cos(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$.

sol: Según la indicación, la suma parcial se define como la integral de una suma de cosenos:

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{N} \cos((2k+1)u)\,du$$ 0.3 pt.

Utilizando una identidad trigonométrica, podemos expresar cada término de la suma en función de senos:

$$\cos((2k+1)u)\sin(u) = \frac{1}{2}\left(\sin(2(k+1)u) - \sin(2ku)\right)$$ 0.3 pt.

Por lo tanto, la suma parcial se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{x} \sum_{k=0}^{N} \cos((2k+1)u)\frac{\sin(u)}{\sin(u)}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin(2(N+1)u) - \sin(0)}{\sin(u)}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin(u)}\,du \end{aligned}$$ 0.4 pt.

e) **(1.0 puntos)** Pruebe que el primer máximo local de S_N en $(0,\pi)$ es $x_N = \dfrac{\pi}{2(N+1)}$.

sol: Al derivar $S_N(x)$, obtenemos

$$S'_N(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(2(N+1)x)}{\sin(x)}$$ 0.3 pt.

Para encontrar los puntos críticos, debemos buscar aquellos valores de x para los cuales $\sin(2(N+1)x) = 0$. Esto ocurre cuando $2(N+1)x = k\pi$, donde la primera raíz corresponde a $k=1$. Por lo tanto, obtenemos $x_N = \frac{\pi}{2(N+1)}$. 0.4 pt.
Además, podemos demostrar que se trata de un máximo local analizando la segunda derivada

$$\begin{aligned} S''_N(x_N) &= \frac{2(N+1)\cos(2(N+1)x_N)\sin(x_N) - \sin(2(N+1)x_N)\cos(x_N)}{\pi\sin^2(x_N)} \\ &= \frac{2(N+1)\cos(\pi)}{\pi\sin(x_N)} < 0 \end{aligned}$$ 0.3 pt.

P2 (6.0 puntos)

Nos proponemos resolver la ecuación en derivadas pariales no homogénea siguiente

$$(*)\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 1,\ x \in (0,\pi/2),\ t > 0. \\ u(0,t) = 1,\ u_x(\pi/2,t) = -\pi/2. \\ u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x,\ u_t(x,0) = 0, x \in (0,\pi/2). \end{cases}$$

a) **(1.0 puntos)** Considerando el cambio de variable $w(x,t) = u(x,t) + f(x)$, donde u es solución del sistema anterior; determine f tal que w sea solución de

$$(**)\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, \ x \in (0, \pi/2), \ t > 0. \\ w(0,t) = 0, \ w_x(\pi/2, t) = 0. \\ w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\pi x - 1, \ w_t(x,0) = 0, x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

Sol: Usando el cambio de variable sugerido tenemos $u_{tt} = w_{tt}$. Además, $w_{xx} = u_{xx} + f''(x)$. Como queremos que $w_{tt} = w_{xx}$, se sigue que $f''(x) = 1$. 0.1 pt.
Luego, f tiene la forma $f(x) = x^2/2 + cx + d$ donce c y d son constantes. 0.2 pt.
Para determinar las constantes c y d usamos las condiciones de borde. Note que

$$1 = u(0,t) = w(0,t) - f(0).$$ 0.1 pt.

Por tanto $f(0) = -1$ ya que $w(0,t) = 0$. Esto implica que $d = -1$. Además 0.1 pt.

$$-\frac{\pi}{2} = u_x(\pi/2, t) = w_x(\pi/2, t) - f'(\pi/2).$$ 0.1 pt.

Luego, $c = 0$ ya que $w_x(\pi/2, t) = 0$. 0.1 pt.
En conlusión, $f(x) = x^2/2 - 1$ es tal que w verifica $w_{tt} = w_{xx}$ y $w(0,t) = w_x(\pi/2, t) = 0$. 0.1 pt.
Por último, para dicha función f se sigue que las condiciones iniciales de w son

$$u(x,0) = w(x,0) - \frac{x^2}{2} + 1 = -x^2 + \frac{\pi}{2}x,$$ 0.1 pt.

obteniendo $w(x,0) = -x^2/2 + \frac{\pi}{2}x - 1$; y $w_t(x,0) = 0$. 0.1 pt.

b) **(2.0 puntos)** Pruebe que si $w(x,t) = M(x)N(t)$, entonces M verifica

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M(0) = M'(\pi/2) = 0. \end{cases}.$$

Además, pruebe que para $\lambda_n = (2n+1)^2$ se obtienen las soluciones no triviales de la forma $M_n(x) = \sin((2n+1)x)$ con $n \geq 1$.
Indicación: Analice los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

Sol: Considerando $w(x,t) = M(x)N(t)$ se sigue que

$$M(x)N''(t) = M''(x)N(t).$$

Como buscamos soluciones no nulas tenemos la siguiente expresión debe ser constante, digamos $-\lambda$, es decir,

$$\frac{N''(t)}{N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)} = -\lambda.$$ 0.1 pt.

Además, de las condiciones de borde de w tenemos $M(0) = M'(\pi/2) = 0$. Por lo tanto, 0.1 pt.
M verifica el sistema indicado. Ahora, debemos analizar la naturaleza de λ.
Caso $\lambda = 0$: Se tiene que $M''(x) = 0$. Luego, $M(x) = cx + d$. Pero como $M(0) = M'(\pi/2) = 0$, obtenemos la solución nula $M(x) = 0$. Por tanto λ no puede ser cero. 0.3 pt.
Caso $\lambda < 0$: En este caso la solución tiene la forma $M(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$ con 0.3 pt.

C_1 y C_2 constantes, ya que las raíces de la ecuación característica son reales. Imponiendo las condiciones de borde, las constantes C_1 y C_2 verifican

$$C_1 + C_2 = 0,$$
$$\sqrt{-\lambda}(-C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi/2} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi/2}) = 0.$$
0.3 pt.

Por lo tanto $C_1 = C_2 = 0$, obteniendo nuevamente una solución nula. 0.3 pt.

Caso $\lambda > 0$: En este caso la solución es de la forma $M(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ 0.3 pt. ya que las raíces del polinomio característica son complejas. Notemos que la condición $M(0) = 0$ implica que $C_1 = 0$. Además, usando la condición $M'(\pi/2) = 0$ se sigue que $C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 0$. Para obtener soluciones no nulas debe ocurrir que $\cos(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 0$. De esta forma, $\sqrt{\lambda}\pi/2 = (2n+1)\pi/2$ con $n \geq 0$. Por lo tanto $\lambda_n = (2n+1)^2$ y 0.3 pt. $M_n(x) = C_2 \sin((2n+1)x)$ con $n \geq 0$ verificando lo pedido.

c) **(1.0 puntos)** Use λ_n del ítem anterior para concluir que w tiene la forma

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)] \sin((2n+1)x).$$

Indicación: Determine la forma general de $N(t)$ para dicho valor λ_n.

Sol: Del ítem anterior tenemos $N''(t) + \lambda_n N(t) = 0$. La solución general de esta ecuación es de la forma $N(t) = A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)$ ya que $\lambda_n > 0$. 0.5 pt. Como $w_n(x,t) = M_n(x)N_n(t)$ y la ecuación el lineal, se sigue w tiene la forma (incluyendo la constante C_2 en las constantes A_n, B_n)

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos((2n+1)t) + B_n \sin((2n+1)t)] \sin((2n+1)x).$$
0.5 pt.

d) **(1.0 punto)** Use la condición $w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1$ para deternimar A_n; y use que $w_t(x,0) = 0$ para concluir que $B_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Easter egg:

$$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$$

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2x\sin(x) + C$$

Sol: Siguiendo las indicaciones, tenemos

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin((2n+1)x).$$

Multiplicando por $\sin((2j+1)x)$ la ecuación anterior e integrando el resultado sobre el intervalo $(0, \pi/2)$ obtenemos

$$A_j = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1\right) \sin((2j+1)x) dx,$$
0.2 pt.

donde hemos usado la ortogonalidad de conjunto $\{\sin((2n+1)x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Usando los cómputos proporcionados obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} -\frac{x^2}{2}\sin((2j+1)x)dx =& \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(2j+1)^3} - (-1)^j\frac{\pi}{(2j+1)^2}\right),\\ \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}x\sin((2j+1)x)dx =& (-1)^j\frac{\pi}{2(2j+1)^2},\\ \int_0^{\pi/2} \sin((2j+1)x)dx =& \frac{1}{2j+1}.\end{aligned}$$ 0.2 pt.

Por lo tanto, $A_n = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)$. 0.2 pt.

Por último, para hallar los coeficientes B_n derivamos respecto a t a w obteniendo

$$w_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[-A_n(2n+1)\sin((2n+1)t) + B_n(2n+1)\cos((2n+1)t)]\sin((2n+1)x).$$

Evaluando en $t=0$ la expresión anterior se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)B_n]\sin((2n+1)x) = 0.$$ 0.2 pt.

Nuevamente, por la ortogonalidad del conjunto $\{\sin((2n+1)x)\}_{n\geq 0}$ concluimos que $B_n = 0$ para $n \geq 0$. 0.2 pt.

En resumen, la solución del sistema $(**)$ es

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)\cos((2n+1)t)\right]\sin((2n+1)x).$$

e) (1.0 punto) Determine la solución del sistema $(*)$.

- **Sol:** Recordemos que $w(x,t) = u(x,t) + f(x)$. Vimos que para $f(x) = x^2/2 - 1$, w es solución de $(**)$. De esta forma, la solución de $(*)$ es:

$$u(x,t) = -\frac{x^2}{2} + 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)\cos((2n+1)t)\right]\sin((2n+1)x).$$ 1.0 pt.