MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 1: Sigma-álgebras y medidas.

16 de agosto de 2023

P1. Cosillas para calentar.

a) Pruebe que la intersección de clases $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ cada una de ellas cerradas bajo uniones numerables e intersecciones numerables es cerrada para estas dos operaciones. Podemos hablar entonces de la clase cerrada por uniones e intersecciones numerables generada por $\mathcal{C}$ que denotaremos $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

b) Sea Θ la colección de abiertos usuales en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\mathcal{G}(\Theta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indicación: Considere $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{G}(\Theta) : A^c \in \mathcal{G}(\Theta)\}$

P2. La preimagen se porta bien. Sean X, X' dos conjuntos y $f : X \to X'$ una función.

a) Demuestre que si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una $\sigma-$álgebra, entonces

$$\mathcal{T}' = \{A \subseteq X' : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

es una $\sigma-$álgebra.

b) Demuestre que si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ es una $\sigma-$álgebra, entonces

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}'\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

es una $\sigma-$álgebra.

c) Demuestre que para $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X')$, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

P3. A medir. Sea $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espacio de medida semifinita, esto es, para todo $E \in \mathcal{T}$ con $\mu(E) = \infty$, existe $F \in \mathcal{T}$ con $F \subseteq E$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$.

a) Demuestre que para todo $E \in \mathcal{T}$ tal que $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$, existe $F \in \mathcal{T}$, con $F \subseteq E$ tal que $r < \mu(F) < \infty$.

b) Demuestre que toda medida $\sigma-$finita es semifinita.

c) Dé un contraejemplo para la recíproca.

P4. [Propuesto]. Pongámonos las pila(mbda)s. Considere dos medidas de probabilidad μ_1, μ_2 sobre el mismo espacio medible $(X, \mathcal{F})$, y sea $A \subseteq \mathcal{F}$ un $\pi-$sistema tal que $\sigma(A) = \mathcal{F}$. Muestre que si μ_1 y μ_2 coinciden en A, entonces coinciden en todo $\mathcal{F}$.