Pauta Auxiliar #1

P1 a) Consideremos una colección de clases $\{\mathcal{C}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ arbitraria, donde:

$\forall \lambda \in \Lambda$ $\quad \mathcal{C}_\lambda$ es cerrado para uniones e intersecciones numerables.

Sea $\mathcal{C} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda$. Queremos demostrar las sgtes 2 propiedades.

(1) $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

(2) $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

- Probemos (1): (2) es análoga y queda propuesta

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ arbitrario. PDQ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$. Esto es, por def.:

$\forall \lambda \in \Lambda$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}_\lambda$. Sea $\lambda\in\Lambda$

- En efecto, como $\forall n \in\mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{C}_\lambda$ como $\mathcal{C}_\lambda$ es cerrada para uniones numerables:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}_\lambda .$$

Con esto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ y probamos lo pedido.

Con esto, podemos definir la clase cerrada más pequeña que contiene a una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos de la sgte manera:

$$\left[\ \mathcal{G}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \supseteq \mathcal{F} \\ \mathcal{C} \text{ familia} \\ \text{cerrada}}} \mathcal{C}\ \right]$$

b) Consideremos Θ la topología métrica sobre $\mathbb{R}$

PDQ $\mathcal{G}(\Theta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En general las igualdades de tipo "Algo" = sigma álgebra se suelen hacer por doble implicancia

$\subseteq$ Notemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ por ser σ-álgebra es en particular cerrado para uniones e intersecciones numerables. Luego, al ser $\mathcal{G}(\Theta)$ la clase más pequeña que contiene a Θ, y como $\Theta \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene lo pedido.

$\supseteq$ Para esto nos gustaría encontrar que $\mathcal{G}(\Theta)$ es σ-álgebra* (pues casi lo es) pero no sabemos nada acerca del comportamiento de $\mathcal{G}(\Theta)$ con los complementos.

*ya que si $\mathcal{G}(\Theta)$ es σ-alg, como $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Theta)$ y $\Theta \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$ obtenemos lo buscado.

Trabajemos entonces con la familia propuesta en el hint:

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{G}(\Theta) : A^c \in \mathcal{G}(\Theta)\}$$

Veamos que es σ-álgebra:

i.- $X \in \mathcal{D}$ En efecto: $X \in \Theta \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$ Luego, $X \in \mathcal{G}(\Theta)$

ii.- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$. En efecto si $A \in \mathcal{D}$, veamos $A^c \in \mathcal{D}$:

- $A^c \in \mathcal{G}(\Theta)$ pues $A \in \mathcal{D}$
- $(A^{c})^c \in \mathcal{G}(\Theta)$ pues $(A^c)^c = A \in \mathcal{G}(\Theta)$ pues $A \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$
- Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ PDQ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$

Vemos que $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \{A_n\}_n \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$

Como $\mathcal{G}(\Theta)$ es cerrada: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}(\Theta)$

Nos falta entonces probar que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \in \mathcal{G}(\Theta)$

En efecto: $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$, y:

- Como $A_n \in \mathcal{D}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, por def de $\mathcal{D}$ tengo que $A_n^c \in \mathcal{G}(\Theta)$
- Como $\mathcal{G}(\Theta)$ es cerrada $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{G}(\Theta)$

Así, obtenemos que $\mathcal{D}$ es σ-Álgebra

Ahora debemos probar que $\Theta \subseteq \mathcal{D}$ y terminamos. En efecto, sea $A \in \Theta$. Trivialmente $A \in \mathcal{G}(\Theta)$ pues $\Theta \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$.

Veamos $A^c \in \mathcal{G}(\Theta)$.

Sean $B_k := \{ x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{k} \}$

B_k es un abierto y $B_k \supseteq A^c$.

Más aún $\bigcap_k B_k = A^c$. Con ello

Como $B_k \in \Theta \subseteq \mathcal{G}(\Theta)$ $\forall k\in\mathbb{N}$ y $\mathcal{G}(\Theta)$ es cerrada, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{G}(\Theta)$

Así $A^c \in \mathcal{G}(\Theta)$ y con ello $\mathcal{D} \supseteq \Theta$

Con lo que probamos lo pedido ■

$\boxed{P2}$ a) Probemos que T' es σ-Álgebra sobre X' por definición.

i.- $\emptyset \in T'$. En efecto, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$ pues T es σ-Álgebra.

ii.- Sea $A \in T'$, veamos que $A^c \in T'$

En efecto $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ y $f^{-1}(A) \in T$ (por def de T'). Como T es σ-Alg, entonces $f^{-1}(A^c) \in T$, i.e., $A^c \in T'$

iii.- Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}'$ PDQ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}'$

En efecto, queremos ver que $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{T}$, pero para esto basta notar que:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$ y como $A_n \in \mathcal{T}'$ $\forall n\in\mathbb{N}$

entonces $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{T}$ es σ-Álgebra:

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}$, i.e., $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}'$.

Con esto probamos lo pedido.

b) Análogo Ponerle ojo a donde vive cada cosa para probar esto.

c) Ocuparemos doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ Por b) tenemos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es una σ-Álgebra. Además:

Si $A \in \mathcal{C}$, $A \in \sigma(\mathcal{C})$ luego $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

Así: $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

Con ello, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es σ-Álgebra y contiene a $f^{-1}(\mathcal{C})$. Por lo tanto:

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

$\boxed{\supseteq}$ Notemos que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ esto por def es:

$\forall A \in \mathcal{C}$ $f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ (por def).

Consideremos $\mathcal{T}' := \{A \subseteq X' : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$

Idea común en medida: tomar la familia de todos los conjuntos que cumplen alguna cosa que ya sabemos.

Notemos que $\forall A \in \mathcal{C}$ $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{C})$

por lo tanto $\forall A \in \mathcal{C}$ $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma^{-1}(\mathcal{C}))$

Es decir: $\mathcal{C} \subseteq T'$. Esto implica que

$\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(T') = T'$ (pues T' ya es σ-Álgebra).

Esto es, por def. de T':

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

P3 a) Razonamos por contradicción. Sea $E \in \mathcal{T}$ tq $\mu(E) = \infty$ y $r > 0$ tales que:

$\forall F \in \mathcal{T}$ tq $F \subseteq E$: $\mu(F) = \infty \vee \mu(F) \leq r$

Notemos que si todos estos F fueran de medida infinita, inmediatamente se contradice el hecho de que $(X, \mu, \mathcal{T})$ es semifinito.

Por lo tanto, sabemos que existe al menos un $F \in \mathcal{T}$ tq $F \subseteq E$ y $\mu(F) < \infty$. Por la hipótesis de contradicción se obtiene que $\mu(F) \leq r$.

Sea el conjunto $M = \{\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{T}, \mu(F) < \infty\}$ (conjunto de números reales). Como $0 \in M$ pues $\mu(\phi) = 0 < r$ y $\phi \subseteq E$, $\phi \in \mathcal{T}$, tenemos que M es no vacío.

Además M está claramente acotado superiormente por r, luego, por axioma del supremo:

$$\exists s \in \mathbb{R} \text{ tq } \sup_{m \in M} m = s$$

Luego, $\exists \{s_n\}_n \subseteq M$ tq $s_n \nearrow s$. Por ende por def. de M

$$\exists \{F_n\}_n \subseteq \mathcal{T} \text{ tq } F_n \subseteq E \text{ y } \mu(F_n) \nearrow s$$

Definimos los sgtes conjuntos:

$B_k := \bigcup_{n=1}^{k} F_n$. Notemos que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$F_k \subseteq B_k$. Además $\mu(B_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\mu(B_k) < \infty$, ya que:

$$\mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(F_n) \to$$ Suma finita de medidas finitas.

Así, como $\mu(B_k) \in M$, $\mu(B_k) \leq S$

Consideremos ahora $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$

Como $B_k \nearrow B$ obtenemos que

$$\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$ → La medida se porta bien con los límites monótonos de conjuntos.

Así: $\forall k \in \mathbb{N}$:

$\mu(F_k) \leq \mu(B_k) \leq S$ tomando $\lim_{k\to\infty}$

$\Rightarrow S \leq \mu(B) \leq S \Rightarrow \mu(B) = S$.

Luego, el supremo es alcanzado. Ahora, consideremos el conjunto

$$E \setminus B$$

Claramente $\underbrace{\mu(E)}_{\text{infinito}} = \mu(E\setminus B) + \underbrace{\mu(B)}_{\text{finito}}$

$\Rightarrow \mu(E\setminus B) = \infty$. Como (X, T, F) es semifinito $\exists\, \tilde{F} \subseteq E\setminus B$ medible tq $\mu(\tilde{F}) > 0$ y finita.

Notemos que $\tilde{F}$ es disjunto a B, luego

$$\mu(\tilde{F} \dot\cup B) = \mu(\tilde{F}) + \mu(B) > S.$$

Pero $\mu(\tilde{F}\cup B) \in M$ lo cual rompe la condición de supremo de S $\to$ ※ ■

b) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-finito, es decir:

$\exists \{A_n\}_n \subseteq \mathcal{M}$ tal que es disjunta y:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(A_n) < \infty$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$.

Consideremos dicha colección para probar que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es semifinito.

Sea E medible con $\mu(E) = \infty$.

Notemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\mu(E \cap A_n) > 0$

pues si no fuese el caso:

$$\infty = \mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu\left(E \cap \left(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n\right)\right)$$

$$= \mu\left(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} (E \cap A_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E \cap A_n) = 0$$

Así, obtuvimos $E \cap A_n \subseteq E$, que es medible pues E y A_n lo son y de medida finita y positiva

Con esto, probamos lo pedido $\blacksquare$

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ con μ la medida cuentapuntos. Ejercicio: chequearlo.

$\boxed{P4}$ Hint: leer el nombre de la pregunta. y ocupar la filosofía de la familia de todos los conjuntos que apañan.