MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 3: Más medidas.

31 de agosto de 2023

P1. Completitud de la extensión de Carathéodory. Sea $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ una medida exterior y sea η la sigma álgebra de los μ^*-medibles. Demuestre que entonces el espacio de medida $(X, \eta, \mu^*|_\eta)$ es completo (i.e. contiene a todos los conjuntos despreciables).

P2. Irreducibles. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que A es irreducible para μ si $\mu(A) > 0$ y si para todo $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subseteq A$, se tiene que

$$\mu(B) = 0 \text{ o } \mu(B) = \mu(A)$$

Supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ no tiene conjuntos irreducibles. El objetivo de este ejercicio es demostrar que

$$\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} = [0, \mu(X)]$$

Sea $c \in (0, \mu(X))$ cualquiera.

a) Considere $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) \geq c\}$. Muestre que existe $A_0 \in \mathcal{C}$ tal que

$$A \subseteq A_0 \ \wedge \ A \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(A) = \mu(A_0)$$

b) Muestre que existe $B_0 \in \mathcal{F}$ que satisface las siguientes propiedades

- $B_0 \subseteq A_0$.
- $\mu(B_0) \leq c$.
- Si B es tal que $B_0 \subseteq B \subseteq A_0$ y $\mu(B) \leq c$, entonces $\mu(B) = \mu(B_0)$.

c) Considere el conjunto $A_0 \setminus B_0$ y muestre que si $\mu(A_0 \setminus B_0) > 0$, entonces $A_0 \setminus B_0$ es irreducible. Use esto para concluir que $\mu(A_0) = \mu(B_0) = c$.

d) Deduzca que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} = [0, \mu(X)]$.

P3. Topología + Medida = F. Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribui Boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita. Pruebe que todo Boreliano $\mathcal{B}$ satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists F \subseteq X \text{ cerrado})(\exists U \subseteq X \text{ abierto}) F \subseteq B \subseteq U \text{ y } \mu(U \setminus F) \leq \varepsilon$$

Hint: los conjuntos cerrados generan los borelianos.