MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 5: Hölder y otras cositas.

21 de septiembre de 2023

P1. ¿Y la de la igualdad se la saben?

a) **[Propuesto]** Consideren la *desigualdad de Young*: $\forall a, b > 0$, $1 < p, q < \infty$ Hölder conjugados, se tiene que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Pruebe que la igualdad se tiene si y sólo si $a = b^{q-1}$.
Indicación: para la implicancia difícil es recomendable probar (usando herramientas del estilo cálculo diferencial) que el único cero de la función $f(x) := (1 - x^{1-p}) + (p-1)(1-x)$ es el $x = 1$.

b) Sean $p, q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(X) \setminus \{0\}$ y $g \in L^q(X)$ entonces:

$$\int fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q \text{ ssi existe } c > 0 \text{ tal que } g = c \operatorname{sgn}(f)|f|^{p-1} ctp$$

Indicación: calcule el único valor de c que tiene sentido, y use a).

P2. Lindo. Supongamos que $1 \leq p < q \leq \infty$ y $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ entonces:

$$\forall r \in [p, q] : f \in L^r(X)$$

P3. Donde caben 2 caben 3. (Luego, por inducción, caben n)

a) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida, $p, q, r \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $f \in L^p, g \in L^q, h \in L^r$. Muestre que:

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

Hint: Muestre que si $p, q \in (1, \infty)$ tales que $f \in L^p, g \in L^q$ y se cumple que:

$$\|fg\|_s \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

A este lema se le llama *Hölder generalizado*, y en particular implica que $fg \in L^s$

b) **[Propuesto]** Sean $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, $1 \leq r < \infty$ y $(p_i)_{1 \leq i \leq n} \in [1, \infty)^n$ tal que $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Mostrar que:

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$$