

MA3802-1 Teoría de la medida

Profesor: Jaime San Martín

Auxiliares: Axel Álvarez

Juan Pablo Sepúlveda



Auxiliar 7: Uniforme Integrabilidad y algunas cositas.

5 de octubre de 2023

P1. Alguna cosita de A.C. Muestre que toda función Lipschitz definida sobre un intervalo compacto es absolutamente continua.

P2. Alguna cosita de B.V. En $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ consideremos una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica que $f(0) = 0$ y que para cada $s < t$:

$$|f(t) - f(s)| \leq \int_s^t g d\lambda,$$

para cierta función g integrable y positiva. Muestre que f es de variación acotada.

P3. Alguna cosita de U.I. Consideremos un espacio de probabilidad. Sea $p \geq 1$ y sean $\{X_n\}_n \subseteq L^p$. Muestre que:

$$\{X_n\}_n \text{ converge en } L^p \iff \{|X_n|^p\}_n \text{ converge en probabilidad y es U.I.}$$

P4. Alguna cosita probabilística. Considere dos espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$. Ahora sea una variable aleatoria X tal que:

- $X \sim \exp(1)$ para \mathbb{P}
- $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ para $\tilde{\mathbb{P}}$

Con ello:

- a) Muestre que tanto \mathbb{P}_X como $\tilde{\mathbb{P}}_X$ (los push-forward de las medidas respectivas) son a.c. con respecto a λ , la medida de Lebesgue. Deduzca sus derivadas de Radon-Nikodým con respecto a λ .
- b) Verifique absolutas continuidades entre \mathbb{P}_X y $\tilde{\mathbb{P}}_X$.
- c) Calcule las derivadas de Radon-Nikodým que sean posibles entre \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$.