MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 11: Medidas de Radon y Cambio de Variable.

9 de noviembre de 2023

P1. ***Claro caso.*** Considere (X, Θ) un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de medidas de probabilidad sobre $\mathcal{B}(X, \Theta)$ tales que

$$\ell(f) := \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$$

a) Demuestre que ℓ es una medida de Radon y que existe una única medida regular μ sobre $\mathcal{B}(X, \Theta)$ tal que para todo $f \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ se tiene $\ell(f) = \int f d\mu$.

b) Demuestre que $0 \leq \mu(X) \leq 1$.

c) Demuestre que para todo compacto K y abierto θ se cumple

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$$
$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\theta) \geq \mu(\theta)$$

d) Suponga que para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : \mu_n(K^c) \leq \varepsilon$. Demuestre que $\mu(X) = 1$.

P2. ***La del cambio de variable se la saben?.*** Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \mu^n)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Suponga que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función medible y defina $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = f(\|x\|)$, donde $\|x\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Supondremos que g es integrable. Considere la medida $\nu : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$\nu(A) = \int_A g(x)\ dx.$$

Pruebe que ν es invariante por rotaciones, es decir, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\nu(\Psi(A)) = \nu(A),$$

donde $\Psi(x) = \Theta x$, con Θ una matriz ortogonal , esto es,

$$\Theta^{-1} = \Theta^t$$

Recuerde que $\|x\|^2 = x^T x$.

P3. ***O no se la saben?*** Considere la siguiente medida en $\mathbb{R}$:

$$\nu(A) := \int_A \phi(x) dx$$

Donde $\phi(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{x^2}{2})$.

a) Pruebe que ν es finita y equivalente a la medida de Lebesgue. ¿Cuánto es $\nu(\mathbb{R})$?

b) Considere $\nu^n := \nu \otimes \cdots \otimes \nu$ la medida producto de ν consigo misma n veces. Pruebe que es equivalente a la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ y encuentre su derivada de R-N.

c) Calcule la densidad de la siguiente medida sobre $((0, \infty), \mathcal{L}|_{(0,\infty)})$:

$$\rho(A) := \nu(\{x \in \mathbb{R} | x^2 \in A\})$$

d **[Propuesto]** Considere el ρ^n, el producto de ρ consigo n veces y encuentre $\ell : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo $a > 0$:

$$\rho^n\left(\left\{(u_1,\ldots,u_n) \in (0,\infty)^n | \sum_i u_i \geq a\right\}\right) = \int_a^\infty \ell(x)dx$$

Hint: considere el cdv: $u_1 = t_1 t_n, \quad u_2 = t_2 t_n, \quad ,\ldots, \quad u_{n-1} = t_{n-1}t_n, \quad \sum_{i=1}^n u_i = t_n$. Note que $t_i > 0$ y $\sum_{i<n} t_i < 1$.