MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 12: Popurrí.

16 de noviembre de 2023

P1. ***Fubinin't.*** Considere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}, \lambda)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+$. Suponga que $f : X \to \mathbb{R}_+$ es una función $\mathcal{F}$-medible. Definimos los siguientes conjuntos en $X \times \mathbb{R}_+$

$$H_- = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t < f(x)\} \qquad H = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

a) Pruebe que H_-, H son $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ medibles. Piense primero en el caso que f es simple.

b) Pruebe que

$$\mu \otimes \lambda(H) = \mu \otimes \lambda(H_-) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x : f(x) \geq t\}) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x : f(x) > t\}) d\lambda(t) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

c) Pruebe también que $\lambda(\{t : \mu(\{x : f(x) = t\}) > 0\}) = 0$.

P2. ***Más Fubinin't.*** Sean $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida σ-finitos. Suponga que el espacio producto es completo. Demuestre que si existe $A_2 \in \mathcal{F}_2$ no vacío tal que $\mu(A_2) = 0$, entonces $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(X_1)$.

P3. ***¿Y las continuas? Mutis.*** Consideremos el espacio $([0,1], \mathcal{L}, dx)$. Sea $C = \{[f] \in L^\infty \mid \exists g \in [f] \text{ continua}\}$.

a) Muestre que la existencia es con unicidad.

b) Ejemplifique un $f \in L^\infty \setminus C$.

c) Pruebe que C es cerrado.

P4. ***Radon't.*** Sea $\mathcal{C}_0 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua } \mid \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\}$ dotado de $|| \cdot ||_\infty$. Muestre que para todo $\ell \in \mathcal{C}_0^*$ existe una única medida con signo regular finita μ tal que $\forall f \in \mathcal{C}_0$ se tiene que

$$\ell(f) = \int f d\mu$$

Muestre tambíen que $||\ell|| = |\mu|(\mathbb{R})$