FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 1

P1 Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones

a) $s_n = \left(\dfrac{5n^3+1}{5n^3+4}\right)^{2n^3}$ *b)* $v_n = \left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *c)* $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

P2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x>0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{e^{cx}-1}{x-d} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener las constantes a, b, c, d para que f sea continua.

P3 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $(x_n)\subseteq[a,b]$ y $M>0$. Si $\forall n\in\mathbb{N}, |f(x_n)|\le\dfrac{M}{2^n}$, ¿Tiene f un cero?

P4 Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\forall x\in\mathbb{Q}, f(x)=g(x)$. Pruebe que $f=g$

Problemas propuestos

P5 Estudiar la continuidad de la función $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{ con } p,q\in\mathbb{N} \text{ coprimos} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

P6 Sea $t\in[0,1]$. Considere la sucesión definida por la siguiente recurrencia:

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+1}=tx_n+(1-t)x_{n-1}$$

Pruebe que (x_n) posee subsucesión convergente.

P7 Diremos que $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función Lipschitz, si existe una constante $L>0$ tal que:

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|, \quad \forall x,y\in I$$

Demuestre que toda función Lipschitz es continua.

P8 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x)$. Pruebe que f es una función constante

Recuerdos

Def. Una **sucesión** es una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en donde se denota $s(n) = s_n$.

Def. Se dice que (s_n) es **convergente** si existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$$

En tal caso se denota $s_n \to \ell$, o $\lim s_n = \ell$

Def. Se dice que (s_n) es **acotada** si existe un $M > 0$ tal que $|s_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Def. Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama **subsucesión** de (s_n) generada por φ, a la sucesión $(s_{\varphi(n)})$

Teo 1. *Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to \ell \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } \ell$$

Teo 2 (Bolzano - Weiestrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergete*

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua en** $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$

Prop 1 (Caracterización $\varepsilon - \delta$)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon$$

Obs. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$

Prop 2 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones son continuas en $\overline{x}$*

1. *$f + \lambda g$, con $\lambda \in \mathbb{R}$*
2. *$f \cdot g$*
3. *f/g, cuando $g(\overline{x}) \neq 0$*

Prop 3 (Composición de funciones continuas)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{x}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $f(\overline{x})$. Entonces $g \circ f$ es continua en $\overline{x}$*

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $\overline{x}$, para cada $\overline{x} \in A$, diremos que f es **continua**.