MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 1

P1 Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones

a) $s_n = \left(\frac{5n^3+1}{5n^3+4}\right)^{2n^3}$ *b*) $v_n = \left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$ *c*) $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

Sol. *a*) Notemos que:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{5n^3+1}{5n^3+4}\right)^{2n^3} \\ &= \left(\frac{5n^3+4-3}{5n^3+4}\right)^{2n^3} \\ &= \left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{2n^3} \\ &= \left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{2n^3\cdot\frac{5}{5}} \\ &= \left(\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3}\right)^{\frac{2}{5}} \\ &= \left(\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4-4}\right)^{\frac{2}{5}} \\ &= \left(\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{-4}\right)^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Obs 1. Como $a_n := \left(1-\frac{3}{n}\right)^n \to e^{-3}$, se tiene que $a_{5n^3+4} = \left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4} \to e^{-3}$

Obs 2. Como $\frac{3}{5n^3+4} \to 0$, por álgebra de límites se tiene $\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{-4} \to (1-0)^{-4} = 1$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{-4}\right)^{\frac{2}{5}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{-4}\right)^{\frac{2}{5}} && (x \mapsto x^{\frac{2}{5}} \text{ es continua en } e^{-3}) \\ &= \left(\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{5n^3+4}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{5n^3+4}\right)^{-4}\right)\right)^{\frac{2}{5}} && (\text{álg. de límites}) \\ &= (e^{-3}\cdot 1)^{\frac{2}{5}} && (\text{observaciones anteriores}) \\ &= e^{\frac{-6}{5}} \end{aligned}$$

b) Notar que:

$$v_n = \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(-\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

En particular, vemos que:

$$v_{2n} = (-1)^{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e^{-1}$$

Pues $\left(\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)$ es subsucesión de $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$, y además, vemos que:

$$v_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \to -e^{-1}$$

Pues $\left(\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$ también es subsucesión de $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$. Con esto, concluimos que (v_n) no es convergente, al poseer dos subsucesiones que convergen a valores distintos.

c) Notar que:

$$u_{4n} = \cos\left(\frac{\pi \cdot 4n}{4}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Luego, (u_n) no puede ser convergente al tener una subsucesión que no es convergente.

P2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{cx}-1}{x-d} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener las constantes a, b, c, d para que f sea continua.

Sol. Notemos lo siguiente:

- f es continua en $(0, +\infty)$ por álgebra y composición de funciones de continuas, siempre y cuando, se cumpla que $x^2 + a \geq 0, \forall x > 0$. Es decir, se debe cumplir que $a \geq 0$
- f es continua en $(-\infty, 0)$ por álgebra y composición de funciones de continuas, siempre y cuando, se cumpla que $x \neq d, \forall x < 0$. Es decir, se debe cumplir que $d \geq 0$
- f es continua en $x = 0$, si y solo si se cumple que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$$

Como f está bien definida en torno al cero, esto equivale a:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

Vamos a calcular ambos límites laterales e imponer condiciones para que valgan 2.

- Notar que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2}$$

Al evaluar en $x = 0$, se obtiene $\dfrac{\sqrt{a}-b}{0}$, lo que da ∞ si $\sqrt{a} - b \neq 0$. Como buscamos que el límite sea 2, imponemos la condición $\sqrt{a} - b = 0$ para obtener una indeterminación. En particular, se cumple que $a = b^2$, con ello nos queda:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+b^2}-b}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+b^2}-b}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+b^2}+b} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+b^2-b^2}{x^2(\sqrt{x^2+b^2}+b)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}+b} \\ &= \frac{1}{|b|+b} \\ &= \frac{1}{2b} \qquad \text{(se tiene } b = \sqrt{a} \geq 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 \iff \frac{1}{2b} = 2 \wedge \sqrt{a} = b \iff b = \frac{1}{4} \wedge a = \frac{1}{16}$$

- Notar que
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{cx}-1}{x-d}$$
Al evaluar en $x=0$, se obtiene $\frac{0}{-d}$, lo que da 0 si $d \neq 0$. Como buscamos que el límite sea 2, imponemos la condición $d=0$ para obtener una indeterminación. Con ello nos queda:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{cx}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{cx}-1}{cx}\cdot c\\ &=c\cdot \lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} \qquad (C.V:\ u=cx)\\ &=c \qquad \text{(límite conocido)}\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \iff c=2\wedge d=0$$
En conclusión, f es continua si y solo si:
$$a=\frac{1}{16}\wedge b=\frac{1}{4}\wedge c=2\wedge d=0$$

P3 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $(x_n) \subseteq [a,b]$ y $M > 0$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| \leq \dfrac{M}{2^n}$, ¿Tiene f un cero?

Sol.

- Como $(x_n) \subseteq [a,b]$, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que existe una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tal que $(x_{\varphi(n)})$ es convergente, denotemos $x := \lim x_{\varphi(n)}$.
- Como sabemos que $|f(x_n)| \leq \dfrac{M}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. En particular sabemos que:
$$|f(x_{\varphi(n)})| \leq \frac{M}{2^{\varphi(n)}}, \forall n \in \mathbb{N}$$
- Como ambos lados convergen (lo vemos a posteriori), podemos aplicar límite a ambos lados de la desigualdad, obteniendo que:
$$\lim_{n\to\infty} |f(x_{\varphi(n)})| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M}{2^{\varphi(n)}}$$
- Desarrollamos el lado izquierdo:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |f(x_{\varphi(n)})| &= \left|\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)})\right| && (x \mapsto |x| \text{ es continua})\\
&= \left|f(\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)})\right| && (f \text{ es continua en } x)\\
&= |f(x)| && (x_{\varphi(n)} \to x)
\end{aligned}$$
- Desarrollamos el lado derecho:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{M}{2^{\varphi(n)}} &= M \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi(n)} && (M \text{ es constante})\\
&\leq M \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} && (\varphi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N})\\
&= M \cdot 0 && \left(\left|\frac{1}{2}\right| < 1\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

  Como $M > 0$, se tiene $\dfrac{M}{2^{\varphi(n)}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, concluyendo así que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{M}{2^{\varphi(n)}} = 0$
- Reemplazando ambos lados, se obtiene que $|f(x)| \leq 0$, lo que implica $f(x) = 0$, concluyendo de esta forma, que x es un cero de la función.

P4 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$. Pruebe que $f = g$

Sol. Definamos la función $h := |f - g|$, notemos lo siguiente:

Obs 1. $f(x) = g(x) \iff h(x) = 0$

Obs 2. $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$

Obs 3. $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Obs 4. h es continua por álgebra y composición de funciones continuas.

- Por Obs. 1, lo que nos piden es equivalente a probar que $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Supongamos por contradicción que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $h(\alpha) \neq 0$
- Por Obs. 2, obtenemos que α debe ser un número irracional.
- Por Obs. 3, podemos deducir que $h(\alpha) > 0$.
- Por Obs. 4, sabemos que h es continua en α, luego, por caracterización $\varepsilon - \delta$, se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| < \delta \implies |h(x) - h(\alpha)| < \varepsilon$$

- Tomando $\varepsilon = \frac{h(\alpha)}{2}$ que es positivo por lo dicho anteriormente, se obtiene la existencia de un $\delta > 0$ que satisface la siguiente implicancia:

$$|x - \alpha| < \delta \implies |h(x) - h(\alpha)| < \frac{h(\alpha)}{2}$$

  O equivalentemente,

$$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \implies h(x) \in \left(\frac{h(\alpha)}{2}, \frac{3h(\alpha)}{2}\right)$$

- Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q} \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Evaluando $x = q$ en la implicancia anterior, obtenemos que

$$h(q) \in \left(\frac{h(\alpha)}{2}, \frac{3h(\alpha)}{2}\right)$$

- Como $h(q) > \frac{h(\alpha)}{2}$ y $h(\alpha) > 0$, se obtiene que $h(q) > 0$, lo que es una contradicción, pues sabemos que $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.
- En conclusión, el supuesto inicial es falso, y con ello concluimos que $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo que es equivalente a decir que $f = g$.