FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nico Cornejo

Auxiliar 3

Derivadas!

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq a|x-y|^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Para ciertos $a > 0$ y $n > 1$. Muestre que f es derivable y calcule f'

P2 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x^2 + bx + c & x > 0 \end{cases}$$

a) Encuentre condiciones sobre a, b, c para que f sea continua

b) Encuentre condiciones sobre a, b, c para que f sea derivable y calcule f'

c) Estudie la continuidad de la función f'

P3 Utilice la fórmula de la derivada de la función inversa para demostrar que:

$$(arcsinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

P4 Sea $a > 0$ un parámetro. Una tractriz es una curva cuya ecuación cartesiana es de la forma:

$$y = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Considere la recta tangente a la tractriz en un punto P, y sea M_P la intersección de dicha tangente con el eje OY. Demuestre que $dist(P, M_P) = a$, para todo punto P en la tractriz.

Problemas propuestos

P5 Suponga que f es derivable en x_0, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0 - bh)}{h}$$

Con a, b constantes reales.

P6 Pruebe que la derivada de una función impar es par, y la derivada de una función par es impar.

P7 Si f es derivable, ¿es cierto que f' es continua?

P8 Encuentre una función que solo sea diferenciable en un punto

Recuerdos

Def. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, si existe:

$$f'(\overline{x}) := \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

Obs. Notar que:

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h}$$

Def. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ se dice derivable si es derivable en x_0, para todo $x_0 \in (a, b)$

Prop 1. *Si f derivable en $\overline{x}$, entonces es continua en $\overline{x}$*

Prop 2 (Álgebra de derivadas)**.** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:*

- *$f \pm g$ es derivable en $\overline{x}$ con*
$$(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$
- *$f \cdot g$ es derivable en $\overline{x}$ con*
$$(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$$
- *Si $g(\overline{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\overline{x}$ con*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$$

Teo 1 (RdC)**.** *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

Teo 2 (Derivada de la función inversa)**.** *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$ con*

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$