



MA1001-1 Introducción al Cálculo

Profesor: Diana Narváez

Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 16

P1 Determine todo tipo de asíntotas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} \quad b) g(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} \quad c) h(x) = \frac{x^2}{(1+e^x)(x-3)}$$

Obs. La mayoría de los límites involucrados en esta pregunta se pueden calcular con L'Hopital.

Sol.

- a) Notamos que el denominador es $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$, luego, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$. Además, es interesante notar que el numerador se factoriza como:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2 - 1)$$

- **(Verticales)** Los posibles candidatos a asíntota vertical son $x = -5$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 1)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x+5} = \frac{2^2 - 1}{2+5} = \frac{3}{7}$$

De aquí concluimos que $x = 2$ no es una asíntota vertical. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x-2)(x^2 - 1)}{(x-2)(x+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5^+} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{x+5} \\ &= ((-5)^2 - 1) \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} \quad C.V : u = x + 5 \\ &= 24 \cdot (+\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Luego, la única asíntota vertical de f es la recta $x = -5$

- **(Oblicuas)** Como la función es racional, los límites involucrados serán iguales en $+\infty$ y $-\infty$, calculemos m y n .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 3x^2 - 10x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \\ &= \frac{1 - 0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 - x(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 3x - 10} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x^2 + 9x + 2}{x^2 + 3x - 10} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \\
 &= \frac{-5 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} \\
 &= -5
 \end{aligned}$$

Luego, la recta $y = x - 5$ es la asíntota oblicua hacia $+\infty$ y $-\infty$

- **(Horizontales)** Como vimos oblicuas primero, no es necesario estudiar horizontales.
- b) Como $1 + x + x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **(Verticales)** El único candidato a considerar es $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 - 1}{x(\sqrt{1 + x + x^2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x + x^2} + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \frac{1}{x}} \\
 &= \frac{0 + 1}{\sqrt{0 + 0 + 1} + 0} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Luego, f no posee asíntotas verticales.

- **(Horizontales)** Estudiamos a f en $+\infty$ y $-\infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{x} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{x} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Luego, las rectas $y = 1$, $y = -1$ son asíntotas horizontales de f

- **(Oblicuas)** Como hay horizontales en ambas direcciones, no es necesario ver oblicuas.
- c) Como $1 + e^x > 0$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
- **(Verticales)** El único candidato es $x = 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{(1 + e^x)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{1 + e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} \\ &= \frac{9}{1 + e^3} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} \quad C.V : u = x - 3 \\ &= \frac{9}{1 + e^3} \cdot +\infty \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Luego, la única asíntota vertical es la recta $x = 3$

- **(Horizontales)** Estudiamos f en $+\infty$ y $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1 + e^x)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \\ &= \frac{0}{0 + 1} \cdot \frac{1}{1 - 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(1 + e^x)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \\ &= (-\infty) \cdot \frac{1}{1 + 0} \cdot \frac{1}{1 - 0} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Luego, concluimos que f tiene asíntota horizontal $y = 0$ hacia $+\infty$, y no posee asíntota horizontal hacia $-\infty$.

d) **(Oblicuas)** Por lo anterior, solo faltaría revisar si hay una asíntota oblicua en $-\infty$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(1 + e^x)(x - 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - 3} \\
 &= \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \\
 &= \frac{1}{1 + 0} \cdot \frac{1}{1 - 0} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(1 + e^x)(x - 3)} - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x(1 + e^x)(x - 3)}{(1 + e^x)(x - 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 3xe^x - x^2e^x}{(1 + e^x)(x - 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - 3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 3e^x - xe^x}{1 + e^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(1 + e^x)}{1 + e^x} - \frac{xe^x}{1 + e^x} \\
 &= \frac{1}{1 - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \frac{xe^x}{1 + e^x} \\
 &= 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \\
 &= 3 - \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \\
 &= 3 - \frac{1}{1 + 0} \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} (-u)e^{-u} \quad C.V : u = -x \\
 &= 3 + \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} \\
 &= 3 + 0 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la recta $y = x + 3$ es asíntota oblicua de f en $-\infty$

P2 Calcule por definición la derivada de:

a) $\sinh(x)$

b) $x \ln(x)$

Sol. a)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sinh(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x+h} - e^{-(x+h)}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^{-x} e^{-h} - e^x + e^{-x}}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1) - e^{-x}(e^{-h} - 1)}{2h} \\
 &= \frac{e^x}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} - \frac{e^{-x}}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} \\
 &= \frac{e^x}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} - \frac{e^{-x}}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{he^h} \\
 &= \frac{e^x}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} + \frac{e^{-x}}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h} \\
 &= \frac{e^x}{2} \cdot 1 + \frac{e^{-x}}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= \cosh(x)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} x \ln(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \ln(x+h) - x \ln(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(\ln(x+h) - \ln(x)) + h \ln(x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \ln(x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h/x} + \lim_{h \rightarrow 0} \ln(x+h) \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} + \ln(x) \quad C.V : u = h/x \\
 &= 1 + \ln(x)
 \end{aligned}$$

P3 Calcule la derivada de:

a) $\tan^2(x) + \tan(x^2)$

b) $x^{\arctan(x)}$

Sol.

a)

$$\begin{aligned} (\tan^2(x) + \tan(x^2))' &= (\tan^2(x))' + (\tan(x^2))' && (\text{Álg. de derivadas}) \\ &= 2 \tan(x) \cdot (\tan(x))' + \sec^2(x^2) \cdot (x^2)' && (\text{RdC}) \\ &= 2 \tan(x) \cdot \sec^2(x) + \sec^2(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\cosh(\sqrt{x})} \right)' &= \frac{(x)' \cdot \cosh(\sqrt{x}) - x \cdot (\cosh(\sqrt{x}))'}{(\cosh(\sqrt{x}))^2} && (\text{Álg. de derivadas}) \\ &= \frac{1 \cdot \cosh(\sqrt{x}) - x \cdot \sinh(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'}{\cosh^2(\sqrt{x})} && (\text{RdC}) \\ &= \frac{\cosh(\sqrt{x}) - x \cdot \sinh(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cosh^2(\sqrt{x})} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (x^{\arctan(x)})' &= (e^{\arctan(x) \ln(x)})' && (\text{Def. de potencia}) \\ &= e^{\arctan(x) \ln(x)} \cdot (\arctan(x) \ln(x))' && (\text{RdC}) \\ &= x^{\arctan(x)} \cdot ((\arctan(x))' \ln(x) + \arctan(x) (\ln(x))') && (\text{Álg. de derivadas}) \\ &= x^{\arctan(x)} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{x} \right) \end{aligned}$$

P4 Usando la fórmula para la derivada de la función inversa, calcule la derivada de:

a) $\sqrt[3]{x}$

b) $\ln(x)$

Sol.

a) \sqrt{x} es la inversa de la función $f(x) = x^2$, luego:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $\ln(x)$ es la inversa de la función $g(x) = \exp(x)$, luego:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{g'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

P5 Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) = \text{sen}(xy)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje OX , con abscisa positiva ($x > 0$)

Sol. Como P corresponde a la intersección de la curva con el eje OX , se tiene que P tiene ordenada $y_P = 0$, para determinar su abscisa x_P , usamos que P es un punto de la curva, y con ello satisface su ecuación, es decir:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{3}{4} + x_P^2 + y_P\right) &= \text{sen}(x_P \cdot y_P) \\ \iff \ln\left(\frac{3}{4} + x_P^2\right) &= 0 \\ \iff \frac{3}{4} + x_P^2 &= 1 \\ \iff x_P^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como el enunciado nos dice que la abscisa de P es positiva, concluimos que $P = (\frac{1}{2}, 0)$.

Para determinar la recta $y = mx + n$ que es tangente a la curva y pasa por P , suponemos que en torno a P , la curva viene dada por la relación implícita $(x, y(x))$, y con ello, la definición de derivada nos dice que $m = y'(\frac{1}{2})$. Para obtener y' , derivamos la relación implícita que define a la curva, obteniendo que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) &= \frac{d}{dx} \text{sen}(xy) \\ \iff \frac{1}{\frac{3}{4} + x^2 + y} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) &= \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) \\ \iff \frac{1}{\frac{3}{4} + x^2 + y} \cdot (2x + y') &= \cos(xy) \cdot (y + xy') \end{aligned}$$

Evaluando esta última igualdad en P , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + y'\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \cdot y'\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ \iff 1 + y'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot y'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

De esta igualdad, se obtiene que $y'(\frac{1}{2}) = -2$. Para obtener el coeficiente de posición, basta notar que el punto P pertenece a la recta, y con ello satisface la ecuación $y = -2x + n$, obteniendo que $0 = -2 \cdot \frac{1}{2} + n$, lo que nos permite concluir que $n = 1$, y por lo tanto la recta buscada es $y = -2x + 1$

P8 regalo de navidad

P8 [Propuesto] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} mx + n & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de $m, n \in \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable, y determine f'

Sol. Vemos que f es diferenciable en $(-\infty, 0)$ al ser una función lineal. Por otro lado, se tiene que f es diferenciable en $(0, +\infty)$ por álgebra de derivadas, pues $\sin(x)$ es diferenciable. En consecuencia, solo debemos revisar la derivabilidad en $x = 0$, recordemos que:

$$f \text{ es derivable en } x = 0 \text{ si } \exists f'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \iff \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Calculemos ambos límites laterales:

- Por la derecha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

- Por la izquierda:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{mh + n - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} m + \frac{n - 1}{h} = m + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{n - 1}{h}$$

Aquí notamos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{n - 1}{h} = \infty$ si $n - 1 \neq 0$, como buscamos que el límite exista, obtenemos que $n = 1$. De esta forma, se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = m$$

Con ello, deducimos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \iff m = 1 \wedge n = 1$$

En conclusión, se tiene que f es diferenciable si y solo si, $m = n = 1$, y en tal caso $f'(0) = 1$. De esta forma, obtenemos que la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pues $(mx + n)' = m = 1$ para $x < 0$, y $(1 + \sin(x))' = \cos(x)$ para $x > 0$.