FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nico Cornejo

Pauta Auxiliar 3

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|^n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Para ciertos $a > 0$ y $n > 1$. Muestre que f es derivable y calcule f'

Sol.

- Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario
- Sea $y \neq x$. A partir de la hipótesis, se obtiene que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq a|x - y|^{n-1}$$

- En particular, se tiene que

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq a|x - y|^{n-1}, \forall y \neq x$$

- Como $\lim\limits_{y \to x} a|x - y|^{n-1} = 0$. El Teorema del Sándwich implica que

$$\lim_{y \to x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$$

- Lo que es equivalente a

$$\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$$

- Luego f es derivable en x, y se cumple $f'(x) = 0$
- Como x era arbitrario, concluimos que f es derivable y $f' \equiv 0$

P2 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x^2 + bx + c & x > 0 \end{cases}$$

a) Encuentre condiciones sobre a, b, c para que f sea continua

b) Encuentre condiciones sobre a, b, c para que f sea derivable y calcule f'

c) Estudie la continuidad de la función f'

Sol.

a)
- Notar que f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por álgebra y composición de funciones continuas.
- Además, recordamos que f es continua en $x = 0$ si y solo si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$
- Lo que es equivalente a cumplir $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a$
- Vemos que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + bx + c = c$$
Pues $x^2 + bx + c$ es continua en $x = 0$
- Además,
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
Pues x^3 tiende a cero y el seno es acotado.
- Con ello, concluimos que f es continua si y solo si $a = c = 0$

b)
- Por la parte anterior, sabemos que si $a \neq 0$ o $c \neq 0$, f no es continua, y con ello no puede ser derivable. Por ello, asumimos de aquí en adelante que $a = c = 0$
- Notar que f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por álgebra y composición de funciones derivables, además, notamos que
- Si $x > 0$, entonces $f'(x) = (x^2 + bx)' = 2x + b$
- Si $x < 0$, entonces $f'(x) = \left(x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$
- Recordemos que f es derivable en $x = 0$, si y solo si existe el límite $f'(0) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$, y con ello, la derivabilidad se reduce a probar que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
- Vemos que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah^2 + bh - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} ah + b = b$$
- Por otro lado,
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^3 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$
- En conclusión, f es derivable si y solo si $a = b = c = 0$

c) - De la parte anterior, tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

- Notar que f' es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por álgebra y composición de funciones continuas.
- Además, vemos que f' es continua en $x = 0$ si y solo si $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$
- Lo que equivale a cumplir $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$
- Vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

Pues x^2 es continua en $x = 0$
- Además,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Pues seno y coseno son funciones acotadas.
- En conclusión, se obtiene que f' es una función continua.

P3 Utilice la fórmula de la derivada de la función inversa para demostrar que:

$$(arcsinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Sol. $\text{arcsinh}(x)$ es la inversa de la función $f(x) = \sinh(x)$, y recordamos que $f'(x) = \cosh(x)$

$$(\text{arcsinh}(x))' = \frac{1}{f'(\text{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{senh}(\text{arcsinh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donde usamos que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ y $\cosh(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

P4 Sea $a > 0$ un parámetro. Una tractriz es una curva cuya ecuación cartesiana es de la forma:

$$y = a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$$

Considere la recta tangente a la tractriz en un punto P, y sea M_P la intersección de dicha tangente con el eje OY. Demuestre que $dist(P, M_P) = a$, para todo punto P en la tractriz.

Sol.

- Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera en la tractriz.
- Para obtener la recta tangente a la tractriz que pasa por el punto P, necesitamos calcular $y'(x_0)$, para ello basta derivar la relación que define a la tractriz y evaluar en P

- Notamos que

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}\right)' \\
&= a\left(\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)\right)'-\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' \\
&= a\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)}\cdot\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)'-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(a^2-x^2\right)' \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})'\cdot x-(a+\sqrt{a^2-x^2})\cdot(x)'}{x^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x) \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{\left((a)'+(\sqrt{a^x-x^2})'\right)\cdot x-(a+\sqrt{a^2-x^2})\cdot 1}{x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{\left(0+\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'\right)\cdot x-(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)\cdot x-(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{\dfrac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{-x^2-(\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{-x^2-a\sqrt{a^2-x^2}-(a^2-x^2)}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{-a\sqrt{a^2-x^2}-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{ax}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(\frac{-a(\sqrt{a^2-x^2}+a)}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{-a^2x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{-(a^2-x^2)}{x\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}
\end{aligned}
$$

- Recordar que la recta tangente a la curva $(x, y(x))$ en el punto $P(x_0, y_0)$, viene dada por

$$y = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Es decir,

$$y = y_0 + \frac{-\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} \cdot (x - x_0)$$

- Como $M_P(x_M, y_M)$ corresponde a la intersección de la recta con el eje OY, obtenemos que M satisface la ecuación de la recta y además $x_M = 0$, con ello:

$$y_M = y_0 + \frac{-\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} \cdot (0 - x_0)$$

Es decir, $y_M = y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}$

- Luego,

$$\begin{aligned}
d(P, M_P) =& d((x_0, y_0), (x_M, y_M)) \\
=& \sqrt{(x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2} \\
=& \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - \left(y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)\right)^2} \\
=& \sqrt{x_0^2 + \left(-\sqrt{a^2 - x_0^2}\right)\right)^2} \\
=& \sqrt{x_0^2 + (a^2 - x_0^2)} \\
=& \sqrt{a^2} \\
=& |a| \\
=& a
\end{aligned}$$