FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 5

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$ para ciertos $a < b$. ¿Es cierto que existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$?

Sol.

- Notar que no se puede aplicar TVI o Bolzano para concluir directamente, pues f' no necesariamente es continua.
- Como f es continua y $[a, b]$ es cerrado y acotado, f alcanza un mínimo en $[a, b]$
- Veamos que el mínimo no se alcanza en los extremos
- Si suponemos por contradicción que el mínimo se alcanza en $x = a$, entonces $f(a) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, esto implica que:

  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \forall x \in (a, b]$$

  Aplicando límite, se tiene que:

  $$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

  Lo que es una contradicción con la hipótesis del problema
- Analogamente, si suponemos que el mínimo se alcanza en $x = b$, se tendría que $f(b) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, esto implica que:

  $$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0, \forall x \in [a, b)$$

  Aplicando límite, se obtiene que:

  $$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

  Lo que nuevamente nos entrega una contradicción.
- Por lo tanto, concluimos que el mínimo se alcanza en un punto $x_0 \in (a, b)$, y con ello, la Regla de Fermat nos asegura que x_0 es punto crítico de f, es decir, $f'(x_0) = 0$.

P2 Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(2)$. Pruebe que existen dos elementos en el dominio que están a distancia uno y que sus imágenes son idénticas.

Sol.

- Buscamos $x, y \in [0, 2]$ tales que $y - x = 1$ y $f(x) = f(y)$
- Como $y = x + 1$, buscamos $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 1)$
- Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x + 1) - f(x)$
- Notar que g es continua por álgebra y composición de funciones continuas.
- Notemos que
$$g(0) = f(1) - f(0) = a - b$$
$$g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = b - a$$
- Luego, se obtiene que $g(0)g(1) = -(a - b)^2 \leq 0$
- Con ello, el Teorema de Bolzano asegura la existencia de un $x_0 \in [0, 1]$ tal que $g(x_0) = 0$
- Es decir, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + 1)$

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $Im(f) \subseteq \mathbb{Q}$. ¿Qué se puede decir de f?

Sol.

- Probemos que f es constante, es decir, $f(x) = f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$
- Supongamos por contradicción, que existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq f(y)$
- Sin pérdida de generalidad, podemos establecer que $f(y) > f(x)$
- Como los irracionales son densos en $\mathbb{R}$, existe $\alpha \in (f(x), f(y)) \cap \mathbb{Q}^c$
- Luego, por TVI, existe un x_0 entre x e y, tal que $f(x_0) = \alpha$
- Es decir, $\alpha \in Im(f)$, lo que es una contracción, pues $Im(f) \subseteq \mathbb{Q}$
- Por lo tanto, concluimos que f es una función constante.

P4 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Determine los siguientes elementos de f:

a) Dominio, ceros, signos, asíntotas y continuidad

b) Diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos.

c) Intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión.

d) Recorrido y bosquejo del gráfico.

Sol. *a*)

- **[Dominio]** Se tiene que

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x) \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x} \neq 0\} = (0, +\infty)$$

- **[Ceros]** Notar que $f(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$, es decir $f^{-1}(\{0\}) = \{1\}$
- **[Signos]** Como $\sqrt{x} > 0, \forall x \in A$, se tiene que $f(x) > 0 \iff \ln(x) > 0 \iff x > 1$, como el único cero es $x = 1$, se tiene que $f(x) < 0 \iff 0 < x < 1$
- **[Asíntotas]** Notar que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \left(\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (-\infty) \cdot (\infty) = -\infty$$

Luego, la recta $x = 0$ es asíntota vertical de f. Por otro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Luego, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f.
- **[Continuidad]** Como $\ln(x)$ y $\sqrt{x}$ son funciones continuas, se tiene que f es continua por álgebra de funciones continuas.

b)

- **[Diferenciabilidad]** Como $\ln(x)$ y $\sqrt{x}$ son derivables, se tiene que f es derivable por álgebra de funciones derivables, además, vemos que

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2x - x\ln(x)}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}}$$

- **[Crecimiento]** Notamos que $2x^{3/2} > 0, \forall x \in A$, con ello:

$$f'(x) > 0 \iff 2 - \ln(x) > 0 \iff 2 > \ln(x) \iff e^2 > x$$

$$f'(x) < 0 \iff 2 - \ln(x) < 0 \iff 2 < \ln(x) \iff e^2 < x$$

Por lo tanto, f es estrictamente creciente en $(0, e^2)$ y estrictamente decreciente en $(e^2, +\infty)$
- **[Puntos críticos]** Vemos que

$$f'(x) = 0 \iff 2 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$$

Por lo tanto, $x = e^2$ es el único punto críticos

- **[Máximos y Mínimos]** Como f crece si $x < e^2$ y decrece si $x > e^2$, se concluye que el máximo global se alcanza en $x = e^2$. Por otro lado, como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, vemos que f es no acotada inferiormente, por lo que f no tiene mínimo global.

c)

[Segunda derivada] Sabemos que $\ln(x)$ y $x^{3/2}$ son funciones derivables en A, por lo tanto, f' es derivable por álgebra de funciones derivables, con ello se tiene que

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}\cdot 2x^{3/2} - 3\sqrt{x}\cdot(2-\ln(x))}{(2x^{3/2})^2} = \frac{-2\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 3\sqrt{x}\cdot\ln(x)}{4x^3} = \frac{3\ln(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

- **[Convexidad]** Como $4x^{5/2} > 0$ para todo $x \in A$, se tiene que

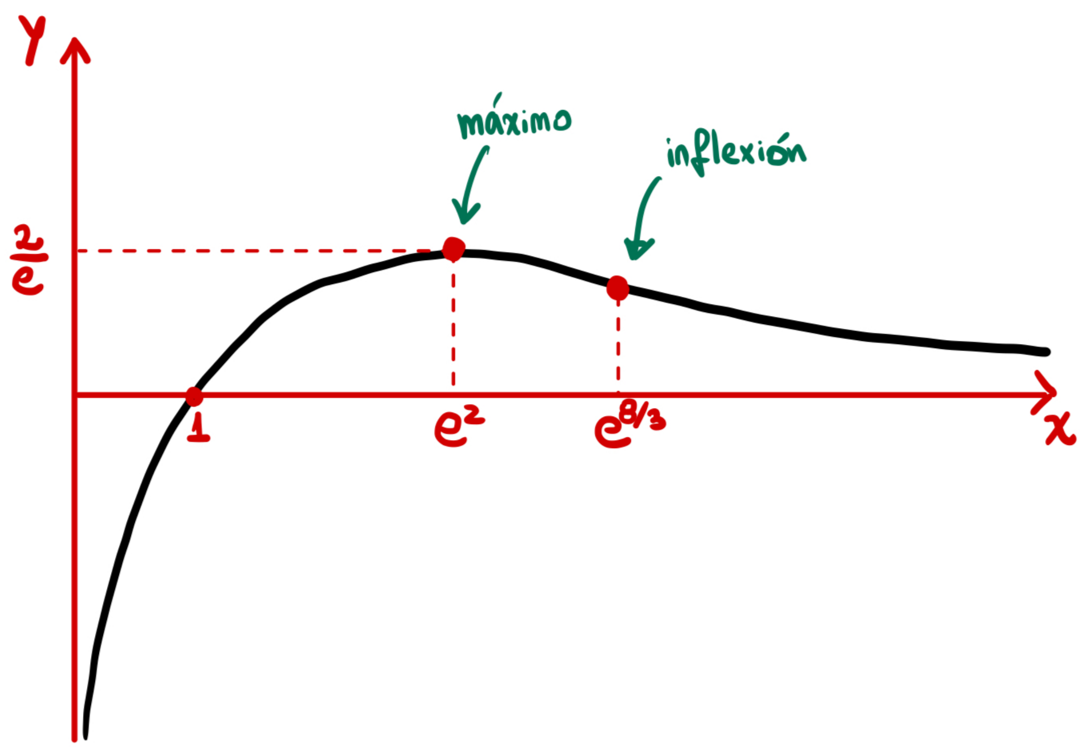
$$f''(x) > 0 \iff 3\ln(x) - 8 > 0 \iff \ln(x) > \frac{8}{3} \iff x > e^{8/3}$$

$$f''(x) < 0 \iff 3\ln(x) - 8 < 0 \iff \ln(x) < \frac{8}{3} \iff x < e^{8/3}$$

Con ello se concluye que f es cóncava en $(0, e^{8/3})$ y convexa en $(e^{8/3}, +\infty)$

- **[Puntos de inflexión]** Como la convexidad solo cambia en $x = e^{8/3}$, se obtiene que este es el único punto de inflexión de f

d) A continuación se muestra un bosquejo del gráfico



Como f es no acotada inferiormente, su imagen tampoco lo es, y como el máximo se alcanza en $x = e^2$, el máximo valor de la imagen es $f(e^2) = \frac{2}{e}$, luego como f es continua, el TVI nos asegura que $f(A) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$