



MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023

Profesora: Diana Narváez

Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 6

Taylor y Newton

P1 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable y $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) < f(x), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Demuestre que $f''(x_0) > 0$

P2 Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, en el Auxiliar anterior vimos que

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2x^{3/2}} \quad \wedge \quad f''(x) = \frac{3 \ln(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

Demuestre que al aproximar $f(x)$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$, en el intervalo $[1, e]$ el error asociado es menor o igual a $(e - 1)^2$.

P3 El objetivo de esta pregunta es estimar la solución de la ecuación $x^3 = x^2 + 1$. Para ello, proceda como sigue:

- Pruebe que la ecuación posee solución.
- Estudie el crecimiento y la convexidad de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.
- Use la parte anterior para deducir que la ecuación posee solución única.
- Aplique el método de Newton para hallar una sucesión (x_n) que converja a dicha solución.

Problemas propuestos

P4 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , y sea $T_k(x)$ su polinomio de Taylor en torno a $x_0 \in (a, b)$. Si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para cada $k \geq n$, ocurre que $T_k(x) = T_n(x), \forall x \in (a, b)$. Pruebe que f es un polinomio.

P5 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $a \in \mathbb{R}$. Utilice la aproximación de segundo orden en torno a $x_0 = a$ para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

P6 Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 tal que $f(0) = 0$. Sea (x_n) la secuencia iterativa definida por $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ con punto de partida $x_0 = 1$.

- ¿Es cierto que $x_n \rightarrow 0$?
- ¿Es cierto que $|f(x_{n+1})| \leq |f(x_n)|$ para todo n ?

Def (Derivadas de orden superior). Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se denota $f^{[0]} = f$ y se define inductivamente $f^{[k]} = (f^{[k-1]})'$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Diremos que f es k -veces derivable en x_0 , si $f^{[k-1]}$ es derivable en x_0

Def (Clase C^k). Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k , si la función f es k -veces derivable en A , y la función $f^{[k]} : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Def (Clase C^∞). Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ , si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teo 1 (Taylor). Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, k -veces derivable en x_0 y sea

$$T_f^k(h) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!} h^n$$

su polinomio de Taylor de orden k en torno a x_0 . Entonces

$$f(x_0 + h) = T_f^k(h) + o(h^k)$$

Donde se satisface $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0$.

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en x_0 . Diremos que x_0 es un **punto de inflexión** de f , si la función f cambia de convexidad en $x = x_0$ (pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa)

Prop 1 (Caracterización de puntos críticos). Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, k -veces derivable (con $k \geq 2$) en $x_0 \in (a, b)$, con $f^{[n]}(x_0) = 0$ para $n \in \{1, \dots, k\}$, y $f^{[k]}(x_0) \neq 0$. Entonces hay 3 casos posibles:

1. Si k es par y $f^{[k]}(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.
2. Si k es par y $f^{[k]}(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.
3. Si k es impar, entonces x_0 es un punto de inflexión

Teo 2 (Estimación del error). Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k + 1)$ -veces derivable en todo punto de (a, b) . Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en torno a $x_0 \in (a, b)$. Entonces $\forall x \neq x_0$, existe un $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$, tal que

$$f(x) = T_f^k(x - x_0) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

Def (Método de Newton). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que existe un $x^* \in A$ que cumple $f(x^*) = 0$. Sea $x_0 \in A$ un valor cercano a x^* tal que $f'(x_0) \neq 0$. Se define la iteración del método de Newton con punto de partida x_0 , como la secuencia (x_n) definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \forall n \geq 0$$

El cual está bien definido siempre que $f'(x_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Teo 3 (Convergencia Local). Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 , y sea $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\varepsilon > 0$ y $M > 0$, tales que para cada punto de partida $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, el método de Newton queda bien definido y converge a x^* con tasa de convergencia cuadrática, es decir

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$$