FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 7

Primitivas

P1 Sean I_1, I_2 intervalos y $f : I_1 \to I_2$ una función biyectiva y diferenciable. Suponga que $f^{-1} : I_2 \to I_1$ también es diferenciable y sea F una primitiva de f. Pruebe que

$$\int f^{-1}(y)\, dy = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

P2 Calcule las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+4}\, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx$
4. $\displaystyle\int \arccos(x)\, dx$
5. $\displaystyle\int e^x \sin(x)\, dx$
6. $\displaystyle\int \frac{7x^2-3x+21}{x^3-x^2+4x-4}\, dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

Problemas propuestos

P3 Calcule las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

b) $\displaystyle\int \sin^4(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)\cosh(x)}{\sqrt{1+\cosh(x)}} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^2+1}\, dx$

f) $\displaystyle\int \csc(x)\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx$

P4 Considere la siguiente familia de primitivas

$$I_n = \int \sec^n(x)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Utilice IPP para probar que se satisface la siguiente regla de recurrencia

$$I_{n+1} = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

Def. Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si

$$\forall x \in int(I), F'(x) = f(x)$$

Se denota por $\int f(x)\,dx$ al conjunto de primitivas de f

Prop 1. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C \;\; con\; C \in \mathbb{R}$

Prop 2. $\displaystyle\int$ *es un operador lineal, es decir* $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g$ *y también* $\displaystyle\int \lambda f = \lambda \int f, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Teo 1 (Cambio de Variable)**.** *Si* $u = g(x)$*, entonces* $\displaystyle\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) g'(x) dx$

Teo 2 (Integración por Partes (IPP))**.** $\displaystyle\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Prop 3 (Sustituciones trigonométricas)**.** *Se recomiendan los siguientes cambios de variables*

- *para* $a^2 + x^2$*, usar* $x = a\tan(u)$ *o* $x = a\,\mathrm{senh}(u)$
- *para* $a^2 - x^2$*, usar* $x = a\,\mathrm{sen}(u)$ *o* $x = a\cos(u)$
- *para* $x^2 - a^2$*, usar* $x = a\sec(u)$ *o* $x = a\cosh(u)$

Prop 4 (Fracciones parciales)**.** *Si se tiene la función racional* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *con* $gr(Q) > gr(P)$*, se aconseja expresar* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *como suma de fracciones, para ello, se factoriza* $Q(x)$ *completamente como*

$$Q(x) = a(x - r_1)^{\alpha_1} \cdots (x - r_s)^{\alpha_s} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

Donde $r_1, ..., r_s$ *son las raíces reales de* Q *con multiplicidades* $\alpha_1, ..., \alpha_s$*, y* $(x^2 + b_i + c_i)$ *son polinomios sin raíces reales. Entonces,* $R(x)$ *es la suma de funciones del siguiente tipo:*

- *Por cada término* $(x - r_i)^{\alpha}_i$*, aparece la suma de* α_i *funciones del tipo*

$$\frac{A_1}{x - r_i} + \frac{A_2}{(x - r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}$$

- *Por cada término* $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$*, aparece la suma de* β_i *funciones del tipo*

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \cdots \frac{B_{\beta_i} x + C_{\beta_i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

Prop 5 (Integrales trigonométricas racionales)**.** *Sea* $R(cos(x), sen(x))$ *una función racional en senos y cosenos. Si se desea calcular la primitiva de esta función, se aconseja el cambio de variable* $t = tan(x/2)$*, de esta forma se obtienen las siguientes expresiones:*

- $dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$
- $\sin(x) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
- $\cos(x) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$