FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 8

Integral de Riemann

P1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule el valor de

$$\int_1^{10^n} [\log(x)]\, dx$$

P2 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que existen familias $(e_n^+) \subseteq \mathcal{E}_+(f)$ y $(e_n^-) \subseteq \mathcal{E}_-(f)$ que cumplen

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (e_n^+ - e_n^-) = 0$$

a) Pruebe que f integrable

b) Concluya que $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n^+ = \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n^-$

P3 Sea $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$. Use la partición equiespaciada de $[1, 2]$ para probar que f es integrable y concluya que

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}\right)$$

Problemas propuestos

P4 Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a < b$, calcule la integral

$$\int_a^b [x] + [-x]\, dx$$

P5 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones escalonadas. ¿Es cierto que $f \cdot g$ es escalonada?

P6 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada y $c \in \mathbb{R}$. Defina $g(x) = f(x - a)$ en el intervalo $[a + c, b + c]$. Pruebe que

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g$$

P7 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, pruebe que $I = \displaystyle\int_a^b f$ es el único real que cumple lo siguiente

$$\int_a^b e_1 \le I \le \int_a^b e_2, \quad \forall e_1 \in \mathcal{E}_-(f), \forall e_2 \in \mathcal{E}_+(f)$$

Def. Una **partición** de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito $P = \{x_0, ..., x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Se llama **norma** de P al valor $|P| = \max_{i=1,...,n} (x_i - x_{i-1})$

Def. Sea $[a, b]$ un intervalo. Su partición **equiespaciada** $P = \{x_0, ..., x_n\}$, viene dada por $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$. Si $0 < a < b$, su partición **geométrica** $P = \{x_0, ..., x_n\}$, viene dada por $x_i = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$

Def. Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada** si existe una partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, tal que f es constante en cada intervalo abierto $(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1, ..., n$

Def. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es escalonada, se define su **integral de Riemann** por

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Donde $P = \{x_0, ..., x_n\}$ designa cualquier partición asociada a f, y f_i denota al valor constante de f en el correspondiente intervalo (x_{i-1}, x_i)

Teo 1 (Linealidad)**.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, entonces*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Teo 2 (Aditividad horizontal)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ escalonada y $c \in (a, b)$. Entonces f es escalonada en $[a, c]$ y $[c, b]$, y además*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Teo 3 (Monotonía)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones escalonadas tales que $f \leq g$. Entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Def. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define lo siguiente:

$$\mathcal{E}_-(f) = \{g : [a, b] \to \mathbb{R} : g \text{ es escalonada y } g \leq f\}$$

$$\mathcal{E}_+(f) = \{g : [a, b] \to \mathbb{R} : g \text{ es escalonada y } g \geq f\}$$

$$I_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b e : e \in \mathcal{E}_- \right\}, \qquad I_+(f) = \sup \left\{ \int_a^b e : e \in \mathcal{E}_+ \right\}$$

Def. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Diremos que f es **Riemann integrable** si $I_-(f) = I_+(f)$. En tal caso, dicho valor se llama la integral de f y se denota $\displaystyle\int_a^b f$

Teo 4 (Condición de Riemann)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es Riemann integrable si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existen funciones $f_- \in \mathcal{E}_-$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+$ tales que*

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon$$