FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 9

Más integrales...

P1 Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es f integrable?

P2 Calcule el siguiente límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} i 2^{\frac{i}{n}} \right)$

P3 Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ integrable. Defina la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_0^1 f(t)\, dt$$

Demuestre que g es acotada y monótona

Problemas propuestos

P4 Calcule el siguiente límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) \sum_{i=1}^{n} \exp(\sqrt[n]{2^i}) \sqrt[n]{2^{i-1}}$

P5 Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua e impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. ¿Qué ocurre si f es par?

P6 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Demuestre que f es integrable en $[a, b]$ si y solo si es integrable en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, y en tal caso

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$$

P7 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Recuerdos

Teo 1. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es monótona, entonces es integrable*

Teo 2. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces es integrable*

Teo 3. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrable y* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$. *Si* (s_n) *es tal que* $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *y denotando* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, *la suma de Riemann asociada se define por*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i$$

Se tiene que $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} S_n$

Teo 4 (Linealidad)**.** *Si* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *son integrables, entonces*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Teo 5 (Aditividad horizontal)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrable y* $c \in (a, b)$. *Entonces* f *es integrable ssi es integrable en* $[a, c]$ *y* $[c, b]$, *y además*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Teo 6 (Monotonía)**.** *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrables tales que* $f \leq g$. *Entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Teo 7 (Desigualdad triangular)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrable, entonces*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Def. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $a > b$ se define $\displaystyle\int_a^b f := -\int_b^a f$

Def. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $c \in [a, b]$. Se define $\displaystyle\int_c^c f := 0$