FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 11

Áreas y volúmenes

P1 Demuestre que en todo rectángulo de lados a y b, la parábola que pasa por sus dos vértices superiores y el punto medio del lado inferior, encierra siempre la misma proporción del área del rectángulo.

P2 Calcular la longitud de la curva definida por

$$C = \left\{(x, y) \in [1, 2] \times [0, +\infty) : 9y^2 = (2 + x^2)^3\right\}$$

P3 Determine todas las funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuas y positivas, que satisfacen que los volúmenes de rotación en torno a los ejes OX y OY de las regiones

$$R_x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq x, 0 \leq y \leq f(t)\}$$

tienen el mismo valor para todo $x \geq 0$

Problemas propuestos

P4 Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2 = 5$ y la parábola de ecuación $y = 2(x - 1)^2$

a) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$

b) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OX.

c) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OY.

P5 Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Sea $L : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, donde $L(x)$ calcula la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x. Si $L(x) + f(x) = e^x - 1$, $\forall x \geq 0$. ¿Qué se puede decir sobre f?

P6 Sea A la región delimitada por las rectas

$$y_1 = x, \quad y_2 = \alpha x, \quad y_3 = 1 - \alpha x$$

con $\alpha \geq 1$ un parámetro.

a) Calcule el área de A y el volumen del solido R obtenido al rotar A en torno al eje OX.

b) Calcule α para que el área sea máxima.

Recuerdos

Prop 1 (Área).

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Prop 2 (Volumen de un solido).

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Prop 3 (Volumen en torno a eje OX).

$$V_{OX} = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Prop 4 (Volumen en torno a eje OY).

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Prop 5 (Largo de curva).

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$