MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 13

Integrales impropias

P1 Determine si las siguientes integrales son o no convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}}dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^{\frac{1}{3}}+x^3}dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x+1}{e^x-x}dx$

P2 Sean $f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=\frac{x}{e}$. Sea R la región delimitada por el eje OY y los gráficos de las funciones f y g.

a) Calcule, si existe, el área de la región R

b) Calcule, si existe, el volumen de rotación de la región R en torno al eje OY

P3 Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

a) Sea $S_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$. Pruebe que (S_n) es convergente

b) Pruebe que existe una sucesión (x_n) no acotada, tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$

Problemas propuestos

P4 Determine si las siguientes integrales son o no convergentes.

a) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ *c)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}dx$

P5 Sea $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\int_1^{x} \frac{t-1}{\sqrt[3]{1+t^3}}\,dx$$

Estudie asíntotas de todo tipo de la función F.

P6 Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función continua. Defina la sucesión $I_n=\displaystyle\int_0^{n} f(x)\,dx$. Determine la veracidad de la siguiente equivalencia

$$I_n \text{ converge} \iff \int_0^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Recuerdos

Def (Primera Especie)**.** Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a,\infty)$ si se cumple:

(i) $\forall x \in (a,\infty)$, f es integrable en $[a,x]$.

(ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ existe.

Obs.: Se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{\infty} f$$

Prop 1. *Dado* $a > 0$. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ *converge si y sólo si* $s > 1$.

Def (Segunda Especie)**.** Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ no acotada, f es integrable en $[a,b)$ si se cumple:

(i) $\forall x \in (a,b)$, f es integrable en $[a,x]$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.

Obs.: En caso de que lo anterior exista denotaremos $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$.

Prop 2. *Dado* $a < b$. *Luego* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$ *converge si y sólo si* $s < 1$.

Def (Tercera Especie)**.** Son las que se obtienen combinando integrales impropias de 1° y 2° especie. Estas integrales convergen si cada una de las integrales en las que se separan (de primera o segunda especie converge)

Teo 1 (Criterio de Comparación)**.** *Sean* g, f *continuas tal que* $0 \le f(x) \le g(x)$ *a partir de* $x \ge a$. *Luego si* $\int_a^\infty g$ *converge, entonces* $\int_a^\infty f$ *converge, de manera recíproca si* $\int_a^\infty f$ *diverge* $\int_a^\infty g$ *también.*

Teo 2 (Criterio de Cuociente)**.** *Sean* f, g *continuas tal que:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Luego $\displaystyle\int_a^\infty g$ *converge* $\iff$ $\int_a^\infty f$ *converge.*

Obs.: *Los criterios de convergencia anteriores sirven también para integrales de segunda especie, reemplazando* ∞ *por* b^-.

Def. Diremos que $\int_a^\infty f$ es absolutamente convergente si $\int_a^\infty |f|$ converge.

Prop 3. *Si* $\int_a^\infty |f|$ *converge, entonces* $\int_a^\infty f$ *converge.*