FI1001-1
Introducción a la Física Newtoniana
Otoño 2017
25 de Abril del 2017

Profesor: Luis Foa Torres
Auxiliares: Danilo Passi
Héctor Ramos
Nicolás Valdés

Auxiliar #5

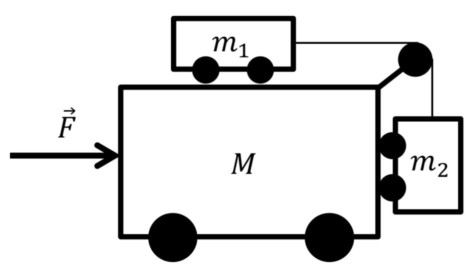
Problema 1

Dos fuerzas, $\vec{F_1} = (-6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})N$ y $\vec{F_2} = (-3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath})N$, actúan sobre una partícula de masa 2kg que está inicialmente en reposo en las coordenadas (-2m, 4m).

a) ¿Cuáles son los componentes de su velocidad en t=10 s?
b) ¿En qué dirección se mueve la partícula en t=10 s?
c) ¿Cuál fue el desplazamiento durante los primeros 10 s?
d) ¿Cuáles son sus coordenadas en t = 10 s?

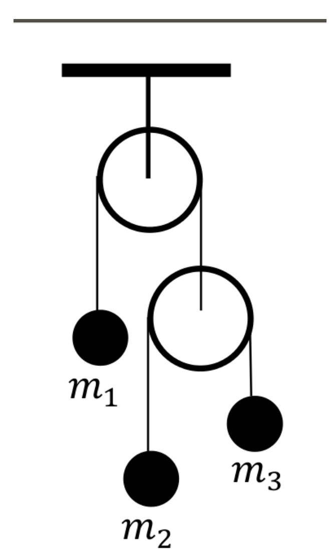
Problema 2

Considere el carro de masa M indicado en la figura. Sobre dicho carro se sitúan dos carros de masa m_1 y m_2. Despreciando el efecto de las fuerzas de roce en cada una de las superficies de contacto, determine el valor de la fuerza F que es preciso aplicar en la dirección horizontal para lograr que el carro m_2 no suba ni baje.

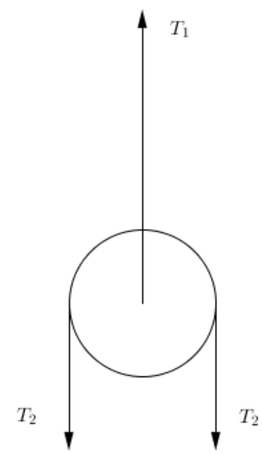


Problema 3

Considere una máquina de atwood doble como se muestra en la figura. Determine la aceleración de cada una de las masas.



P3. En este problema es importante tener cuidado y hacer diagramas de cuerpo libre para cada polea y cada masa. No lo haré para las masas aquí (ya que sobre cada una actúa sólo una tensión hacia arriba, y un peso hacia abajo), pero sí lo haré para la polea que cuelga por el lado derecho. IMPORTANTE: las poleas no tienen masa, pero *esto no significa que no puedan acelerar*! Fijamos el sistema de coordenadas de modo que el eje Y es vertical (y positivo hacia arriba) y el eje X es horizontal. Todas las fuerzas y aceleraciones son sólo a lo largo del eje Y, por lo que ignoraremos el eje X aquí.



Usaremos la siguiente notación: la masa m_1 tiene aceleración a_1, la masa m_2 tiene aceleración a_2, la masa m_3 tiene aceleración a_3, y la polea que cuelga por el lado derecho tiene aceleración a_4 (todas éstas en el eje Y).

Planteamos las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo. Una cosa importante es que dado que las poleas no tienen masa, las tensiones se transmiten perfectamente a través de ellas. Entonces para la polea de arriba, las tensiones en ambos lados son iguales, y para la polea del lado derecho abajo, ocurre lo mismo (pero son dos cuerdas–éstas tensiones no tienen por qué ser iguales).

$$\sum F_{1y} = m_1 a_1 \implies T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \qquad (m_1)$$

$$\sum F_{2y} = m_2 a_2 \implies T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (m_2)$$

$$\sum F_{3y} = m_3 a_3 \implies T_2 - m_3 g = m_3 a_3 \qquad (m_3)$$

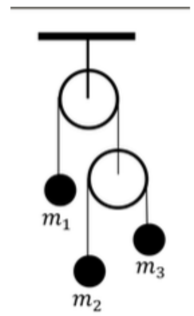
$$\sum F_{4y} = m_4 a_4 \implies T_1 - 2T_2 = m_4 a_4 \qquad \text{(Polea)}$$

Tenemos muchas incógnitas! Pero podemos simplificar un poco, y agregar más ecuaciones (haciendo algo que llamo "análisis dibujístico"). Una primera simplificación: $m_4 = 0$ (la polea no tiene masa), entonces con la ecuación de movimiento de la polea podemos concluir que $T_1 - 2T_2 = 0 \implies T_1 = 2T_2$. (Y de ahora en adelante usaremos $T = T_2$.) Este tipo de argumento es importante; básicamente, la fuerza neta sobre un objeto con masa cero debe ser cero; de otro modo, su aceleración tendría que ser infinita! (RECUERDEN: No significa que el cuerpo tendrá cero aceleración.)

Ahora aplicamos análisis dibujístico. Para esto, será importante considerar el dibujo.

La idea es la siguiente: podemos considerar restricciones geométricas o físicas que vemos en el dibujo, y aplicarlas para relacionar las aceleraciones de las masas (esto suena medio abstracto: léanlo de nuevo después de ver el proceso para que les quede más claro).

Comenzamos observando que las cuerdas tienen un largo constante (son inextensibles). El largo L_1 de la cuerda de arriba lo podemos descomponer en distintas partes: el largo debido a la parte de la cuerda



que cuelga por el lado izquierdo (llamémoslo x_1), el largo que cuelga por el lado derecho (x_4) y el largo de cuerda que siempre está enrollado en la polea (L_0). Es decir, $L_1 = L_0 + x_1 + x_4$. Si ahora analizamos cómo cambia esta expresión en el tiempo, notamos que dado que L_1 es constante,

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta t} = 0 \implies \frac{\Delta(L_0 + x_1 + x_4)}{\Delta t} = 0 \tag{11}$$

Entonces

$$\frac{\Delta L_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t} = 0 \tag{12}$$

Pero el largo de la cuerda que está enrollado (L_0) también es constante, por lo que su variación en el tiempo será cero. Entonces,

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t} = 0 \tag{13}$$

Si vemos la variación de esta nueva expresión en el tiempo, vemos que

$$\frac{\Delta(\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t})}{\Delta t} = 0 \tag{14}$$

Ahora notamos algo: la cantidad $\Delta x_1/\Delta t$ corresponde a la velocidad de m_1 (entonces la llamaremos v_1, y $\Delta x_4/\Delta t$ corresponde a la velocidad de la polea (la cual llamaremos v_4). Entonces,

$$\frac{\Delta(v_1 + v_4)}{\Delta t} = 0 \implies \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta v_4}{\Delta t} \implies a_1 = -a_4 \tag{15}$$

Esa es la magia del análisis dibujístico :). Nota: Podemos hacer algo análogo con las masas m_2 y m_3 para determinar que $a_2 = -a_3$... Pero esto está mal! Es sólo válido desde el punto de vista de la polea de la cual cuelgan m_2 y m_3, y esta polea está acelerando. Entonces visto “desde afuera”, no podemos decir que $a_2 = -a_3$ (este es un punto bien delicado–piénsenlo harto, y si no lo entienden pregunten en el foro o en clases!).

Yap (se pone un poco difícil pero no tanto!). Aplicar $a_2 = -a_3$ sólo es válido cuando la polea derecha está quieta... Veamos qué ocurre cuando se puede mover :). El lado del cual cuelga m_2 tiene cuerda de largo L_2, y el lado derecho tiene largo L_3. La posición de m_2, eso sí, estará dada por y_2, y la de m_3 por y_3. La posición de (la parte de abajo de) la polea la denotaremos y_4. Si consideramos como origen del sistema de coordenadas la posición inicial de la parte de abajo de la polea (ya sé, extraño–pero es conveniente!), tenemos que

$$y_3(t) = -L_3(t) + y_4(t) \tag{16}$$
$$y_2(t) = -L_2(t) + y_4(t) \tag{17}$$

Cada cosa puede variar en el tiempo (es importante), pero de ahora le quito el (t) a las expresiones para hacerlo más corto. Sumando las ecuaciones,

$$y_3 + y_2 = -(L_3 + L_2) + 2y_4 \tag{18}$$

Ahora vemos como cambia esto en el tiempo:

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = -\frac{\Delta(L_3 + L_2)}{\Delta t} + 2\frac{\Delta y_4}{\Delta t} \tag{19}$$

Análogo a lo que vimos en el caso más simple del análisis dibujístico, notamos que $L_3 + L_2$ no cambia en el tiempo (cuerda inextensible), por lo que

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = 2\frac{\Delta y_4}{\Delta t} \tag{20}$$

Variando en el tiempo una vez más podemos concluir sobre las aceleraciones de cada objeto:

$$a_3 + a_2 = 2a_4 \implies \frac{a_3 + a_2}{2} = -a_1 \tag{21}$$

Analizamos ahora el sistema de ecuaciones que teníamos al comienzo gracias a las leyes de Newton (y reemplazamos $T_2 = T, T_1 = 2T$ acorde a lo discutido antes):

$$2T - m_1 g = m_1 a_1 \tag{22}$$
$$T - m_2 g = m_2 a_2 \tag{23}$$
$$T - m_3 g = m_3 a_3 \tag{24}$$

Esto, combinado con la ecuación 21, nos da 4 ecuaciones y 4 incógnitas, por lo que podremos encontrar las aceleraciones de cada masa. Ponderamos las últimas dos ecuaciones por m_3 y m_2 respectivamente y las sumamos:

$$T(m_2 + m_3) - 2m_2 m_3 g = m_2 m_3 (a_2 + a_3) \tag{25}$$

Aplicando 21, vemos que

$$T(m_2 + m_3) - 2m_2 m_3 g = -2m_2 m_3 a_1 \tag{26}$$

Multiplicamos esto por 2:

$$2T(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3 g = -4m_2 m_3 a_1 \tag{27}$$

Y en la ecuación 22 despejamos $2T$, reemplazándolo en esta última ecuación:

$$m_1(a_1 + g)(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3 g = -4m_2 m_3 a_1 \tag{28}$$

Ahora es sólo despejar a_1:

$$\boxed{a_1 = g \cdot \frac{4m_2 m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}} \tag{29}$$

Determinar a_2 y a_3 se los dejo propuesto, es más álgebra nomás :D.

P4. 1) Para esta pregunta, está claro que vamos a necesitar cinemática. Esto es porque tenemos una velocidad inicial dada, y como veremos, una aceleración constante (y lo que nos piden es determinar la altura máxima alcanzada). Lo que debemos hacer primero, eso sí, es usar dinámica para determinar la aceleración que tendrá la masa mientras que va sobre el plano.

Para encontrar esta aceleración, primero hacemos un DCL.