

Auxiliar 2

Repaso de herramientas matemáticas+

Profesora: Maricarmen Winkler

Auxiliares: Gaspar De la Barrera, Diego Rodríguez

Ayudante: Salvador Santelices

P1. Serie de Taylor+

1. Desarrolle en serie de Taylor en torno a $x = 0$ las siguientes funciones: $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = \text{cos}(x)$, $f(x) = \text{tan}(x)$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x + 1)$.
2. Para las primeras tres funciones anteriores, considere $x \ll 1$ rad y cancelando términos de orden mayor al cuadrático, llegue a la aproximación de ángulos pequeños.
3. Estime un valor $x_{\text{máx}}$ tal que en el intervalo $[0, x_{\text{máx}}]$ la aproximación de $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene un error porcentual menor al 10 %.
Indicación: Error porcentual = $\frac{|\text{Valor medido} - \text{Valor real}|}{\text{Valor real}} \cdot 100$
4. Los potenciales son magnitudes presentes en muchas áreas de la física, que nos muestran la energía (o energía por otra unidad) que posee una partícula bajo la influencia de un campo conservativo (sólo depende del punto inicial y final, no de la trayectoria). Encuentre la ecuación de la parábola que mejor aproxima el comportamiento cerca del mínimo de los siguientes potenciales:

- Potencial gravitacional efectivo: $U^*(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$.
- Potencial de Lennard-Jones: $V_{\text{LJ}}(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right]$

P2. Ecuaciones diferenciales+

1. Proponga soluciones polinómicas para $y' = \text{cte}$ y $y'' = \text{cte}$ y determine la solución general para ambos casos.
2. El decaimiento de un isótopo radiactivo puede ser modelado mediante una ecuación diferencial lineal de primer orden, debido a que la tasa a la cual decae es proporcional a la cantidad de material que hay en un instante. Cada material radiactivo posee una

cierta vida media, que es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad. Si (por motivos que no discutiremos aquí) adquiero una muestra de tritio (^3H), que tiene una vida media de 12.3 años, la guardo, y tiempo después la encuentro y veo que se redujo a la décima parte, ¿cuánto tiempo ha pasado?

3. Demuestre el principio de superposición para ecuaciones de segundo grado homogéneas y aplíquelo para encontrar la solución general con $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, con $x_1(t) = \sin(\omega t)$ y $x_2(t) = \cos(\omega t)$. Muestre además que la función $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ también es solución.

P3. Péndulo simple

- a) Considere una masa M atada a una cuerda inextensible de largo L , bajo acción de la gravedad. Si θ es el ángulo que forma la cuerda con respecto a la normal, encuentre la ecuación de movimiento usando:
- La segunda ley de Newton.
 - Conservación de la energía.
- b) Usando la aproximación de ángulos pequeños y la solución general a la ecuación encontrada, exprese y grafique la solución para las siguientes condiciones iniciales:
- $\theta(t = 0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(t = 0) = 0$
 - $\theta(t = 0) = 0$ y $\dot{\theta}(t = 0) = \Omega$
- c) Exprese la tensión de la cuerda para los casos anteriores.
- d) Desciba cualitativamente y bosqueje un gráfico de cómo cambiaría el movimiento del péndulo en presencia de roce con el aire.

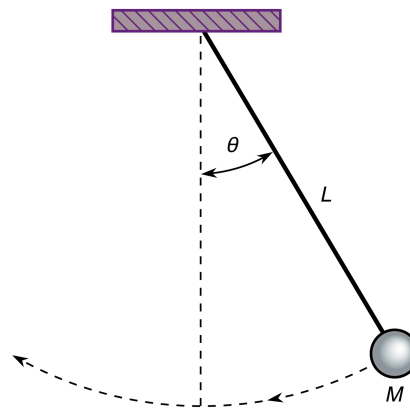


Figura 1: Diagrama del péndulo del problema.