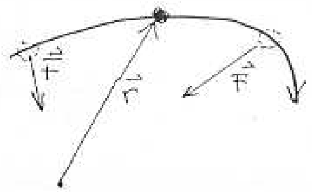
IV FUERZAS CENTRALES

En este capítulo estudiaremos con detalle el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central. Ejemplos típicos son las fuerzas gravitacionales y las fuerzas electrostáticas.

Llamamos fuerza central a aquella que actúa en una línea de acción siempre dirigida hacia un punto fijo con respecto a un sistema de referencia (que suponemos inercial). Si el punto fijo coincide con el origen del sistema de referencia, la fuerza central que actúa sobre una partícula en la posición **r**, se expresa genéricamente por:



$$\vec{F} = f(r)\,\hat{r} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}$$

donde f(r) es la función que da cuenta de la variación de la magnitud de la fuerza central con la distancia al origen. Si f(r) es positiva se dice que la fuerza $\vec{F}$ es repulsiva, mientras que si es negativa se dice que $\vec{F}$ es atractiva.

IV.1 Propiedades generales

Consideremos una partícula de masa m sometida a la fuerza central $\vec{F}$. Se puede deducir que:

a) el **torque** con respecto al centro de fuerzas O es nulo

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\,\hat{r} \times \vec{r} = 0$$

b) el **momentum angular** ($\vec{l}$) con respecto al centro de fuerzas O se conserva. En efecto, en la sección II.2 demostramos que la tasa de variación temporal del momentum angular de una partícula con respecto al origen O es igual al torque que se ejerce sobre ella con respecto al mismo punto O:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

pero como el torque es nulo, se concluye que

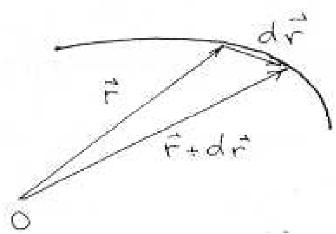
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{l}_O \text{ (constante)}$$

donde $\vec{p} = m\,\vec{v}$ es el momentum lineal de la partícula.

Se concluye que el movimiento es plano, es decir, ocurre sólo en el plano definido por el vector posición y el momentum $\vec{p}$.

c) **Ley de las áreas** (segunda ley de Kepler)

Consideremos el area barrida por el vector posición de una partícula sometida a una fuerza central en el intervalo Δt (recordar que el movimiento es plano)



$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r}$$

dividiendo por el intervalo Δt,

$$\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{r}} \times \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

En el límite, cuando Δt tiende a 0 se define la **velocidad areolar** ($\vec{c}$) como la velocidad de barrido del vector posición $\vec{\mathbf{r}}$,

$$\vec{\mathbf{c}} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2m}\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \equiv \frac{\vec{l}_o}{2\ m}$$

Recordando que el momentum angular es constante para el caso de fuerzas centrales, se tiene entonces que la velocidad areolar tambien es constante. Por lo tanto, el vector posición de una partícula bajo la acción de una fuerza central barre áreas iguales en tiempos iguales.

d) **Ecuaciones de movimiento**

Utilizando un sistema de coordenadas polares para describir el movimiento en un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de fuerza tenemos que

$$m\,(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2) = f(\rho)$$

por existir sólo la componente radial de la fuerza. Además la condición de momentum angular constante implica que:

$$\rho^2\,\dot{\theta} = \frac{l_o}{m}$$

donde l_o es la magnitud constante del momentum angular y m la masa de la partícula. Si se conoce la ley de fuerza $f(\rho)$ se puede determinar completamente el movimiento, a partir de las dos ecuaciones anteriores. En efecto, la ecuación para la componente radial es:

$$m\,\ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{l_o^2}{m\ \rho^3}$$

ecuación que se puede integrar. Esta se puede interpretar como el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a una fuerza efectiva $f^*(r)$

$$f^*(\rho) = f(\rho) + \frac{l_o^2}{m\ \rho^3}$$

y

$$m\,\ddot{\rho} = f^*(\rho)$$

Conocido el movimiento según la coordenada radial podemos determinar el movimiento según el ángulo θ integrando la siguiente ecuación:

$$\rho^2\,\dot{\theta} = \frac{l_o}{m}$$

e) Trayectoria. Ecuación de Binet

La ecuación de la trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central se puede determinar eliminando la variable tiempo (t) de las ecuaciones de movimiento. Haciendo el reemplazo siguiente

$$\rho = \frac{1}{\xi}$$

Llamando h al momentum angular por unidad de masa tenemos que:

$$\rho^2 \mathring{\theta} = \frac{1}{\xi^2}\mathring{\theta} = \frac{l_o}{m} \equiv h$$

Además

$$\mathring{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta}\mathring{\theta} = -\frac{1}{\xi^2}\mathring{\theta}\frac{d\xi}{d\theta} = -h\frac{d\xi}{d\theta}$$

$$\overset{\circ\circ}{\rho} = \frac{d\mathring{\rho}}{d\theta}\mathring{\theta} = -h\frac{d^2\xi}{d\theta^2}\mathring{\theta} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

Por lo tanto

$$-m\,h^2\xi^2\left[\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi\right] = f(\xi)$$

corresponde a la ecuación diferencial que determina la trayectoria en coordenadas polares (ecuación de Binet)

f) Conservación de la energía.

Como hemos demostrado en el capítulo anterior, toda fuerza central es conservativa. En consecuencia, podemos definir una función energía potencial V tal que la fuerza central derive del potencial: $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla V$

Suponiendo que V es conocido, podemos escribir la ecuación de conservación de la energía mecánica total como

$$E = \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}^2 + V = \text{constante}$$

La magnitud de la velocidad en coordenadas polares se expresa por:

$$\mathbf{v}^2 = \mathring{\rho}^2 + (\rho\,\mathring{\theta})^2 = \mathring{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2}$$

con lo cual

$$E = \frac{1}{2}m\,\mathring{\rho}^2 + \frac{m\,h^2}{2\,\rho^2} + V(\rho)$$

Esta ecuación se puede reinterpretar como la conservación de la energía mecánica de una partícula con movimiento unidimensional al definir un potencial efectivo V*

$$V^*(\rho) = V(\rho) + \frac{m\ h^2}{2\ \rho^2}$$

Así la energía mecánica total queda expresada como:

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\rho}^2 + V^*(\rho)$$

Observar que la fuerza efectiva f* correspondiente al potencial V* es

$$f^*(\rho) = -\frac{dV^*}{d\rho} = -\frac{dV}{d\rho} + \frac{m\ h^2}{\rho^3} = f(\rho) + \frac{m\ h^2}{\rho^3}$$

que corresponde a la expresión indicada previamente

Alternativamente, podemos expresar la conservación de la energía mecánica en términos de coordenadas (ξ, θ). En efecto:

$$\mathbf{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2}$$

$$\mathbf{v}^2 = h^2 \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + h^2\, \xi^2$$

con lo cual

$$E = \frac{1}{2}\, m\, h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2 \right] + V(\xi)$$

expresión que se denomina la ecuación de la energía de la órbita.

IV.2 Fuerza gravitacional

Un ejemplo de fuerza central, de singular importancia en Física, lo constituye la ley de atracción gravitacional entre partículas. En el caso que una de las masas esté fija en el origen del sistema de referencia inercial, esta ley se expresa de la siguiente manera (ver sección II.6):

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\,\frac{M\ m}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

donde M y m son las masas de las partículas que interactúan y r es la distancia de separación entre las partículas. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ corresponde a la fuerza que actúa sobre la masa m. G es la constante de gravitación universal. La función energía potencial gravitacional para la masa m está dada por

$$V(r) = -G\,\frac{M\ m}{r}$$

cuando se considera como referencia $V(r = \infty) = 0$ (ver sección III.4).

• **Trayectoria**

Aplicando la ecuación de Binet al caso gravitacional se obtiene:

$$m\ h^2\ \zeta^2 \left[\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta\right] = G\ M\ m\ \zeta^2$$

Recordar que h es el momentum angular por unidad de masa. Simplificando la expresión anterior se obtiene la siguiente ecuación de trayectoria:

$$\left[\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi\right] = \frac{G\,M}{h^2}$$

Esta es una ecuación inhomogénea de 2º orden con coeficientes constantes. Su solución es:

$$\xi(\theta) = \frac{G\,M}{h^2} + A\cos(\theta - \delta)$$

donde A y δ son constantes de integración cuyos valores están determinados por las condiciones iniciales del problema considerado. En consecuencia, la relación entre el radio polar con el ángulo θ queda dada por:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\frac{G\,M}{h^2} + A\cos(\theta - \delta)}$$

ecuación que corresponde a una **sección cónica** expresada en coordenadas polares (ver Apéndice 3). En términos generales una sección cónica se puede expresar como:

$$\rho(\theta) = \rho_o \frac{1 + e}{1 + e\cos(\theta - \delta)}$$

donde r_o es el radio para $\theta = \delta$ y "e" es la excentricidad de la sección cónica. Para el caso particular que analizamos se tiene que:

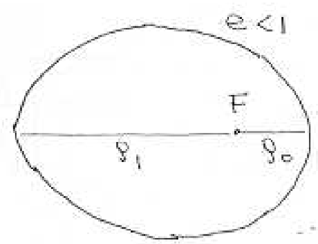
$$e = \frac{A\ h^2}{GM}$$

y

$$\rho_o = \frac{h^2}{G\,M}\ \frac{1}{1 + e}$$

El ángulo δ determina la orientación de la órbita. Entonces, sin perder generalidad, podemos elegir $\delta = 0$.
Los diferentes tipos de trayectoria dependen del valor de la excentricidad:

$e = 0$ (círculo)
$e < 1$ (elipse)
$e = 1$ (parábola)
$e > 1$ (hipérbola)



Las variables ρ_o y ρ_1 que aparecen en la figura anterior se definen como:

$$\rho_o = \rho(\theta = 0)$$

$$\rho_1 = \rho(\theta = \pi) = \rho_o \frac{1 + e}{1 - e}$$

En el caso de una órbita elíptica, la excentricidad puede expresarse en términos de las distancias mínima (ρ_0) y la máxima (ρ_1) al foco:

$$e = \frac{\rho_1 - \rho_o}{\rho_1 + \rho_o}$$

Si las órbitas elípticas corresponden a planetas alrededor del Sol las distancias ρ_0 y ρ_1 se conocen como **perihelio** y **afelio** respectivamente. En el caso del movimiento de la Luna (o satélites artificiales) alrededor de la Tierra, se habla de **perigeo** y **apogeo** respectivamente.

Valores típicos de excentricidades para la órbita de planetas y cometas alrededor del sol se indican en la tabla siguiente:

	e
Tierra	0.017
Marte	0.093
Venus	0.007
Júpiter	0.048
Plutón	0.249
Cometa Halley	0.967

- **Condiciones iniciales**

La trayectoria depende de la condición inicial que se imponga al movimiento, lo que permite especificar las constantes de integración. Suponiendo que para $\theta = 0$, la partícula se encuentra a una distancia R_0 del foco (ρ_0=R_0) y tiene una velocidad v_0, perpendicular a la recta entre el foco y la partícula, se concluye que:

$$h = \frac{l_o}{m} = R_o v_o$$

y

$$e = \frac{R_o v_o^2}{GM} - 1$$

Por lo tanto, la trayectoria de la órbita queda definida por:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\dfrac{GM}{R_o^2 v_o^2} + \dfrac{1}{R_o}\left[1 - \dfrac{GM}{R_o v_o^2}\right]\cos\theta}$$

- **Energía mecánica y excentricidad**

A partir de la ecuación de la conservación de la energía mecánica para una fuerza central y considerando el caso particular de la fuerza gravitacional, se puede deducir que:

$$E = \frac{m}{2} h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2 \right] - GM\, m\, \xi$$

Escribiendo de nuevo esta ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{2E}{m} = h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2 \right] - 2\,G\,M\,\xi$$

y utilizando la dependencia de x con la variable angular θ dada por:

$$\xi(\theta) = \frac{1 + e\cos\theta}{\rho_o (1 + e)}$$

y su correspondiente derivada:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{e \operatorname{sen}\theta}{\rho_o (1 + e)}$$

se obtiene finalmente:

$$\frac{2E}{m} = \frac{h^2}{\rho_o^2 (1 + e)^2}\left[e^2 + 1 + 2e\cos\theta\right] - \frac{2GM}{\rho_o (1 + e)}(1 + e\cos\theta)$$

Si en la ecuación anterior se reemplaza ρ_Q por su correspondiente expresión definida anteriormente se concluye que:

$$\frac{2E}{m} = \left(\frac{GM}{h}\right)^2 (e^2 - 1)$$

ecuación que expresa la relación que existe entre la energía E de la órbita, el momentum angular $l_o = m\,h$ y la excentricidad e. Alternativamente,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}$$

expresión que muestra explícitamente que la naturaleza de la trayectoria depende de las condiciones iniciales de energía y momentum angular. En efecto, podemos clasificar las órbitas según la energía mecánica total como sigue:

$E < 0$,	$e < 1$: órbitas cerradas (círculo o elipse)
$E = 0$,	$e = 1$: órbita parabólica
$E \gtrsim 0$,	$e > 1$: órbita hiperbólica

Como la energía mecánica total E se conserva y $E = K + V$, se concluye que si $K < |V|$ la órbita es cerrada mientras que si $K > |V|$, la órbita es abierta.

• **Análisis gráfico de las trayectorias**

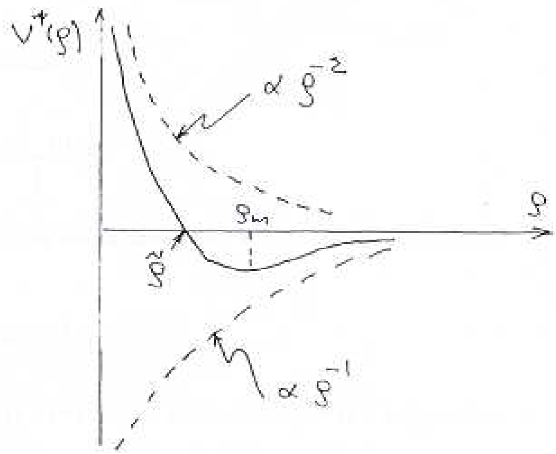
Una forma de comprender el tipo de trayectorias de una partícula en un campo de fuerzas gravitacionales es analizar la función energía potencial correspondiente. En efecto, el movimiento puede interpretarse como el movimiento unidimensional de una partícula en un potencial efectivo $V^*(r)$, de modo que la energía total E queda definida como (ver sección IV.I f):

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V^*(\rho)$$

donde V^* (r), está dado por

$$V^*(\rho) = -G\frac{M\,m}{\rho} + \frac{l_o^2}{2\,m\,\rho^2}$$

El segundo término de la derecha recibe el nombre de **potencial centrífugo**. Hay dos puntos importantes que considerar:



a) el radio $\tilde{\rho}$ donde se anula el potencial V^* es:

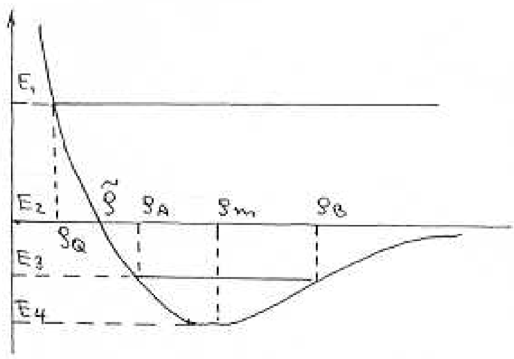
$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2\,G\,M}\left(\frac{l_o}{m}\right)^2 = \frac{h^2}{2\,G\,M}$$

b) el radio ρ_m donde el potencial es mínimo es:

$$\rho_m = 2\tilde{\rho}$$

el potencial efectivo correspondiente es:

$$V^*(\rho_m) = -\frac{G\,M\,m}{4\,\rho_o} = -\frac{G\,M\,m}{2\,\rho_m}$$



Con estos datos podemos identificar cualitativamente las diferentes trayectorias. Si consideramos un nivel de energía E_1, observamos que ρ_Q es la distancia mínima al origen ya para esa distancia $\dot{\rho} = 0$. Esto **no** significa que allí la velocidad de la partícula es nula ya que como en general:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

en la distancia ρ_Q se tiene que $\mathbf{v} = \rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ de modo que la normal a la trayectoria coincide con el radio vector. La trayectoria no puede incluir puntos tales que $\rho < \rho_Q$. Para $\rho > \rho_Q$ la trayectoria es la indicada en la figura.

Si el nivel de energía es $E_2 = 0$, el punto de retroceso es $\rho = \tilde{\rho}$ y la trayectoria es un caso especial de la situación anterior.

Para $E = E_3$, se tiene que la rapidez radial es nula en $\rho = \rho_A$ y ρ_B. Luego el movimiento es posible entre los radios ρ_A y ρ_B.

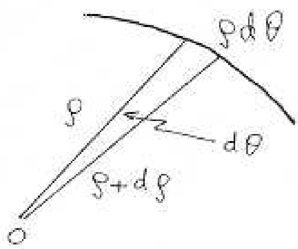
La trayectoria queda encerrada entre dos círculos de radios ρ_A y ρ_B, respectivamente y es tangente a ellas en los puntos de contacto. Como se ha demostrado previamente, para $E < 0$ la trayectoria es cerrada y corresponde a una elipse. Para el nivel de energía mínimo (E_4), los círculos anteriores coinciden en un radio (ρ_m) donde el potencial es mínimo. El movimiento es circular uniforme y corresponde a la situación en que la barrera centrífuga equilibra la fuerza gravitacional atractiva,

$$G\frac{M\ m}{\rho_m^2} = \frac{l^2}{m\ \rho_m^3}$$

• **Período órbital**

Según el principio de conservación de momentum angular tenemos que:

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{l_o}{m} \equiv h$$



lo cual se puede escribir como: $h\, dt = \rho^2\, d\theta = 2\, dS$

donde dS es el elemento de área barrido por el radio vector.
Integrando en una órbita completa,

$$T = \frac{2\ S}{h} = \frac{2\ m}{l_o} S$$

donde T es el tiempo que demora la partícula en describir una órbita completa. Si la órbita considerada es una elipse ($S = \pi$ ab), el período es

$$T = \frac{2\ m}{l_o}\pi\ a\ b$$

siendo a y b los semi-ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Es fácil demostrar (ver Apéndice 3) que

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

y

$$a = \left(\frac{l_o}{m}\right)^2 \frac{1}{GM}\frac{1}{1 - e^2}$$

con lo cual el período se puede expresar como

$$T^2 = \frac{(2\ \pi)^2}{G\,M}a^3$$

relación que corresponde a la **tercera Ley de Kepler**.

• **Velocidad de escape**

Corresponde a la velocidad inicial de lanzamiento para lograr una órbita parabólica. Se deja como ejercicio demostrar que la velocidad de escape es:

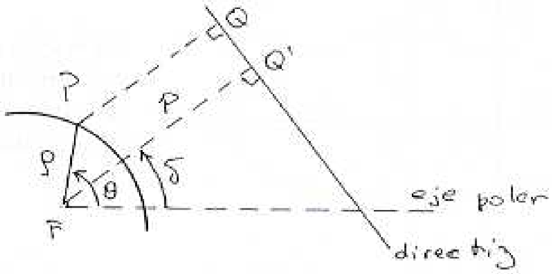
$$v_e = \sqrt{\frac{2\ G\ M}{R_o}}$$

donde R_o es la distancia inicial de la partícula al foco.

APENDICE 3: Secciones cónicas

Una **sección cónica** es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo F (foco) es proporcional a su distancia a una recta fija (directriz)

$$PF \;\alpha\; PQ$$



Llamando e (excentricidad) a la constante de proporcionalidad, tenemos que PF = e PQ. Si p es la distancia desde la directriz al foco (FQ') y si se expresa la posición del punto P en coordenadas polares (ρ, θ), se obtienen las siguientes relaciones geométricas:

$$PF = \rho$$
$$PQ = FQ' - \rho \cos(\theta - \delta)$$
$$PQ = p - \rho \cos(\theta - \delta)$$

En consecuencia,

$$\rho(\theta) = \frac{p\ e}{1 + e \cos(\theta - \delta)}$$

ecuación que describe una sección cónica en coordenadas polares con el origen de las coordenadas coincidente con el foco. Alternativamente, podemos escribir la ecuación de la sección cónica como

$$\rho(\theta) = \rho_o \frac{1 + e}{1 + e \cos(\theta - \delta)}$$

donde se ha definido ρ_o como

$$\rho_o = \frac{p\ e}{1 + e}$$

Observar que el ángulo δ determina la orientación de la órbita. Para efectos de estudiar los diferentes tipos de secciones cónicas consideraremos d = 0.

Dependiendo del valor de la excentricidad e, existen 3 tipos de secciones cónicas

- $e < 1$ (elipse; e=0: círculo)
- $e = 1$ (parábola)
- $e > 1$ (hipérbola)

Cónicas en coordenadas cartesianas

Consideremos un sistema de referencia cartesiano cuyo origen coincide con el foco de la sección cónica. Haciendo una transformación de coordenadas polares a cartesianas,

$$x = \rho \cos\theta$$

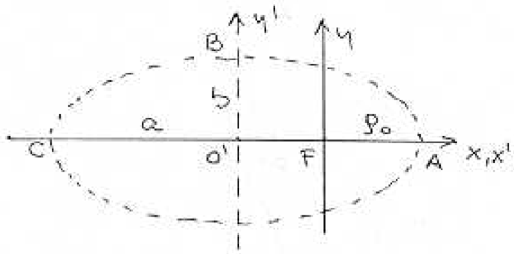
$$y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta$$

podemos escribir la ecuación de la sección cónica como

$$(1 - e^2)\, x^2 + 2\,\rho_o\, e\,(1 + e)\, x + y^2 = \rho_o^2\,(1 + e)^2$$

• **Elipse**

Corresponde al caso en que $e < 1$. La geometría de la elipse queda totalmente determinada por el largo a del semi-eje mayor y el largo b del semi-eje menor. En efecto, con respecto a un nuevo sistema de referencia (x', y') definido por la transformación



$$x' = x + O'F$$
$$y' = y$$

se pueden definir las siguientes distancias,

$$O'A = a\ \frac{1}{2}\{\rho(\theta{=}0) + \rho(\theta{=}\pi)\} = \frac{\rho_o}{1 - e}$$

$$O'F = O'A - FA = ae$$

$$BF = r(\cos\theta = -e) = a$$

$$O'B = b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Entonces, la ecuación de la elipse en las coordenadas (x', y') es

$$(1 - e^2)\,(x' - a\,e)^2 + 2\rho_o\, e\,(1 + e)\,(x' - a\,e) + y'^2 = \rho_o^2\,(1 + e)^2$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene finalmente que

$$\left[\frac{x'}{a}\right]^2 + \left[\frac{y'}{b}\right]^2 = 1$$

El área de la elipse se obtiene a partir de

$$S = \int_{y'=-b}^{b} \int_{-x_1}^{+x_1} dx\ dy'$$

donde el límite de integración x_1 está dado por:

$$x_1 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y'^2}$$

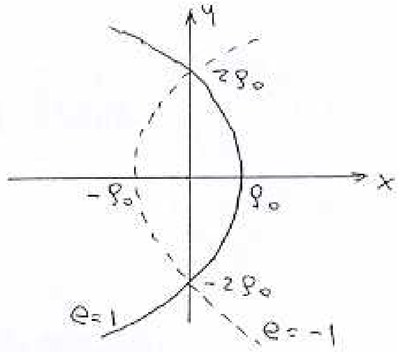
Así,

$$S = 2\,\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - y'^2}\;dy' = \pi\, a\, b = \pi\, a^2\sqrt{1 - e^2}$$

• **Parábola**

Corresponde al caso en que e = 1. La ecuación correspondiente en coordenadas cartesianas es

$$y^2 + 4\,\rho_o\, x = 4\,\rho_o^2$$



y cuya representación gráfica es la que se indica en la figura (línea llena). Observar que también es posible una trayectoria parabólica para e = -1 (línea cortada).

• **Hipérbola**

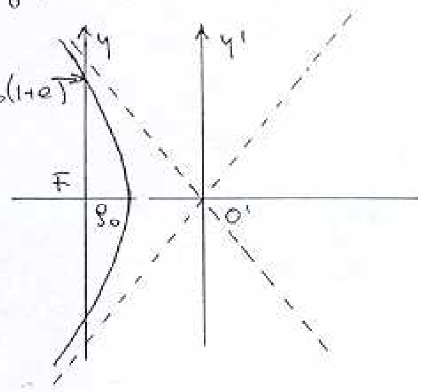
Corresponde al caso en que e > 1. La ecuación siguiente es una modificación de la ecuación general, cuando se hace explícito el hecho que $e^2 > 1$,

$$(e^2 - 1)\,x^2 - 2\,\rho_o e\,(e + 1)\,x - y^2 = -\rho_o^2\,(e + 1)^2$$

Cambiando de sistema de referencia del modo siguiente:

$$x' = x - \rho_o\,\frac{e}{e - 1}$$

$$y' = y$$



se obtiene que:

$$x'^2 - \frac{y'^2}{e^2 - 1} = \rho_o^2\,\frac{1}{(e - 1)^2}$$

ecuación que se reduce a la forma usual siguiente,

$$\frac{x'^2}{\left[\dfrac{\rho_o}{e - 1}\right]^2} - \frac{y'^2}{\left[\rho_o\sqrt{\dfrac{e + 1}{e - 1}}\right]^2} = 1$$

En la figura se muestra la forma de la hipérbola en la zona de interés (línea contínua) y sus puntos más relevantes.