Pauta Auxiliar 2 S2 20/03/24

**P1 (a)** PDQ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x^2 < x \Rightarrow x^3 < x^2$

Una forma: Tratar de escribir lo que deseamos demostrar por algo más fácil de trabajar. Acá es usual escribir "Algo" $< 0$ ó "Algo" $\geq 0$. pues $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$.

Dem
$$x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-1) < 0.$$

entonces tenemos $x^2$ que siempre es $\geq 0$. Como todo debe ser $< 0$ solo nos queda verificar que $(x-1) < 0$ necesariamente, para ello ocupamos la Hipotesis

Sabemos que $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$
$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0. \Leftrightarrow x < 0 \text{ ó } (x-1) < 0$$

Como solo pueden ocurrir 2 casos excluyentes (uno ó el otro) podemos colocarnos en casos.

Caso 1: Si $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$ y Además $x - 1 < 0$
$\Rightarrow x^2 \cdot (x-1) < 0$ necesariamente.

Caso 2: Si $x - 1 < 0 \Rightarrow x - 1 < 0$ y Como Siempre $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x^2 > 0$
$\Rightarrow x^2(x-1) < 0$. necesariamente.

$\therefore$ En Ambos Casos $x^2(x-1) < 0 \Leftrightarrow x^3 < x^2$. //

Otra forma (Por Contradicción) Suponemos que $x^3 < x^2$ es falso. (la negación es Verdad)

Entonces se cumple que $\sim(x^3 < x^2) \Leftrightarrow x^3 \geq x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 \geq 0$
$$\Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0.$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x^2 > 0 \Rightarrow$ Se debería cumplir que $x - 1 \geq 0$.

Pero por Hipotesis $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0$.

Caso 1 Si $x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0$ pero $x - 1 \geq 0$ $\times$

Caso 2 Si $x - 1 < 0$ es directa la contradicción pues $x - 1 \geq 0$ $\times$

$\therefore$ $x^3 < x^2$ es necesariamente Verdad.

**P1** (b) Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(a<b)\wedge(c<d) \Rightarrow (a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$

Igual que en (a) tratemos de trabajar un poco con lo que nos piden demostrar y la idea es la misma, dejar un 0 en la desigualdad.

Notar que
$$(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < 2ac + 2bd - (ac + ad + bc + bd)$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < ac + bd - ad - bc$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < a(c-d) - b(c-d)$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < (a-b)(c-d)$$

la idea es a futuro ocupar $a<b$ y $c<d$ que es $a-b<0$ y $c-d<0$

Entonces demostrar $0<(a-b)(c-d)$ es equivalente a demostrar:
$$(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$

**Dem**

Por hipotesis $a-b<0 \wedge c-d<0$ y por regla de signos en $\mathbb{R}$.
$$\Rightarrow\ 0 < (a-b)\cdot(c-d)$$
$$\Leftrightarrow\ (a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$
$\therefore$ demostramos lo pedido.

**P1** (c). Dados $x,y,z \in (0,\infty)$ demostremos que: $(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$

Esto es muy tipo P2, P3 RP2. Por ello vamos a utilizar la ayuda. Primero tratemos de simplificar la expresión o dejarla distinta

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \Leftrightarrow xx^{-1} + xy^{-1} + xz^{-1} + yx^{-1} + yy^{-1} + yz^{-1} + zx^{-1} + zy^{-1} + z^{-1}z^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\ 1 + \underbrace{(xy^{-1} + yx^{-1})} + 1 + \underbrace{(xz^{-1} + z^{-1}x)} + 1 + \underbrace{(yz^{-1} + zy^{-1})}$$

Notar que por Hint estamos agrupando estos terminos para aparecer $a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$

Ademas notar por ejemplo que si $a = xy^{-1} \Rightarrow a^{-1} = x^{-1}y = yx^{-1}$

$$\Leftrightarrow\ 3 + (a+a^{-1}) + (c+c^{-1}) + (b+b^{-1}).$$

Luego por P2 RP2 se cumple $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ que $x + x^{-1} \geq 2$.

$$\Rightarrow \quad a + a^{-1} \geq 2 \quad , \quad c + c^{-1} \geq 2 \quad , \quad b + b^{-1} \geq 2$$

$$\Rightarrow \therefore \quad 3 + (a + a^{-1}) + (c + c^{-1}) + (b + b^{-1}) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

es decir, $(x + y + z)(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}) = 3 + (a + a^{-1}) + (c + c^{-1}) + (b + b^{-1}) \geq 9$

$\therefore$ Hemos demostrado lo pedido.

## $\boxed{P2}$ Absolute Value.

Uno puede ocupar un Algoritmo ("Receta") para resolver estos ejercicios.

---

**Algoritmo 1** Resolución de inecuaciones con valor absoluto y cociente.

---

1. Tratar de simplificar la expresión
2. Conocer los valores de $x$ que:
   - 2.1 hacen al valor absoluto 0(cuando cambia de signo)
   - 2.2 indefinen la fracción(cuando es 0)
   - 2.3 hacen el numerador 0.
3. Dividir $\mathbb{R}$ en intervalos según los valores de x de 2.1
   - 3.1 Eliminar el valor absoluto dependiendo de qué intervalo estamos de 3. Nos quedarán diferentes inecuaciones.
   - 3.2 Aplicar método de puntos críticos(tabla,etc) para cada caso de 3.1 utilizando los valores de 2.2 y 2.3. Tomar especial cuidado con 2.3
     - 3.2.1 Dados los puntos críticos de 2.2 y 2.3 intersectar los intervalos del metodo de puntos críticos con el intervalo de 3. a trabajar respectivamente
4. Unir todas las soluciones finales de 3.2

---

Sea $|x-1|/x+2 \leq 0$ , entonces

(2.1) $|x-1| = 0$ si $x = 1$

(2.2) $x = -2$

(2.3) $x = 1$ (Detalle con 2,3)

(3.) $I_1 = (-\infty, 1)$ $\quad I_2 = [1, \infty)$

(3.1) Si $x \in I_1 \Rightarrow -x+1/x+2 \leq 0$

Si $x \in I_2 \Rightarrow x-1/x+2 \leq 0$

(3.2) Aplicamos el Método para $I_1, I_2$.

(3.2.1) Para $I_1 = (-\infty, 1)$ con ptos Críticos $= \{-2, 1\}$

Vamos a trabajar en $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, \infty)$ pero en $I_1$.

$\Rightarrow$

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 1)$ |
|---|---|---|
| $-x+1$ | + | + |
| $x+2$ | − | + |
| $-x+1/x+2$ | − | + |

$\Rightarrow \quad S_1 = (-\infty, -2)$

Para $I_2 = [1, \infty)$ Vamos a trabajar en $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, \infty)$ pero en $I_2$

$\Rightarrow$

| | $(1, \infty)$ |
|---|---|
| $x-1$ | + |
| $x+2$ | + |
| $x-1/x+2$ | + |

$\Rightarrow \quad S_2 = \phi$

(4) $\therefore\ S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-2) \cup \phi = (-\infty,-2)$

Pero falta analizar 2.3, notar que $x=\{1\}$ cumple $\frac{|x-1|}{x+2} \leq 0$

$$\Rightarrow \quad S = (-\infty,-2) \cup \{1\}. //$$

$\boxed{P2}$ a $\quad |2x + |x-1|| \leq 1.$ (Este ejercicio es muy fome)

Forma 1: Esto se hace de adentro para afuera. primero veamos cuando $|x-1| = 0$.

$$\Rightarrow \quad x = \{1\}.$$

Caso 1: Si $x \geq 1 \Rightarrow |2x + x-1| \leq 1 \Leftrightarrow |3x-1| \leq 1$

Caso 2: Si $x < 1 \Rightarrow |2x - x + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |x+1| \leq 1.$

Caso 1: $|3x-1| = 0 \Rightarrow x = 1/3$

Sabiendo $x \geq 1$

- Subcaso 1.1 Si $x \geq 1/3 \Rightarrow 3x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 3x \leq 2$
- Subcaso 1.2 Si $x < 1/3 \Rightarrow -3x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 3x \geq 0$

$$S_{1.1} = (-\infty, 2/3] \cap [1/3, \infty) = [1/3, 2/3]$$
$$S_{1.2} = \mathbb{R}_0^+ \cap (-\infty, 1/3) = [0, 1/3)$$

Luego
$$S_{1.1} \cap [1,\infty) = \phi$$
$$S_{1.2} \cap [1,\infty) = \phi$$

Caso 2: $|x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$

Sabiendo $x < 1$

- Subcaso 2.1 Si $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$
- Subcaso 2.2 Si $x < -1 \Rightarrow -x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -2$

$$S_{2.1} = (-\infty, 0] \cap [-1, \infty) = [-1, 0]$$
$$S_{2.2} = [-2, \infty) \cap (-\infty, -1) = [-2, -1)$$

Luego
$$S_{2.1} \cap (-\infty, 1) = [-1, 0]$$
$$S_{2.2} \cap (-\infty, 1) = [-2, -1)$$

$$\therefore\ S = S_{1.1} \cup S_{1.2} \cup S_{2.1} \cup S_{2.2} = [-2, 0]$$

$\boxed{P2}$ (b) $\quad \frac{|x-2| - |x+2|}{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|x-2| - |x+2|}{(x-2)(x+2)} \geq 1.$

Notemos que los valores de $x$ que hacen 0 los valores absolutos son $x=2$, $x=-2$. Los mismos que indefinen la fracción. Por lo que $x=2$, $x=-2$ no pueden ser solución. Ahora nos separamos en casos dados los valores de 2.1 (Leer Algoritmo)

(i) $x<-2$ $\quad x\in(-\infty,-2)$

(ii) $-2<x<2$ $\quad x\in(-2,2)$

(iii) $x>2$. $\quad x\in(2,\infty)$

(i) La inecuación queda de la forma $\dfrac{-x+2-(-(x+2))}{x^2-4}\geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x^2-4}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x^2-4}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2+4}{x^2-4}\geq 0 \quad /\cdot -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-8}{x^2-4}\leq 0 \quad , \text{ Como } x\in(-\infty,-2) \Rightarrow x^2-4>0$$

Por lo que debemos encontrar los $x$ tales que $x^2-8\leq 0$.

$$\Leftrightarrow x^2\leq 8 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x|\leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$$

$$S_i=(-\infty,-2)\cap[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]=[-2\sqrt{2},-2)$$

(ii) Para $x\in(-2,2)$ la inecuación queda: $\dfrac{-x+2-(x+2)}{x^2-4}\leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2-4}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x-x^2+4}{x^2-4}\leq 0 \quad /\cdot -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-4}{x^2-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2-5}{x^2-4}\geq 0$$

Como $x\in(-2,2) \Rightarrow x^2-4<0$

Buscamos entonces soluciones tales que $(x+1)^2-5\leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\leq 5 \;/\sqrt{\ }$

$$\Leftrightarrow |x+1|\leq\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\leq x\leq -1+\sqrt{5}$$

Luego $S_{ii}=[-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}]\cap(-2,2)=[-1+\sqrt{5},2]$

(iii) Sea $x\in(2,\infty) \Rightarrow$ Vamos a tener $\dfrac{x-2-(x+2)}{x^2-4}\geq 1$

$$\Leftrightarrow -4/x^2-4 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-4}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-4} - x^2 + \cancel{4}}{x^2-4} \geq 0 \quad /\cdot -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2-4} \leq 0$$

Como para $x \in (2,\infty)$ $x^2-4>0$ buscamos soluciones tales que $x^2 \leq 0$.

Pero $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0 \Rightarrow$ el único $x$ que cumple es $x=0$.

$$\therefore \quad S_{iii} = \{0\} \cap (2,\infty) = \emptyset.$$

Finalmente $S = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} = [-2\sqrt{2},-2) \cup [-1+\sqrt{5}, 2] \cup \emptyset$

$\boxed{P2}$ (c) $\quad x \geq ||x+1|+|x-1|-|x||-1$

Esta inecuación con el Método de P2.a es "rápido". También se podría trabajar como $0 \geq ||x+1|+|x-1|+|x||-1-x$.

1ero: Ver Valores Absolutos de Adentro (De adentro para Afuera)

Es decir los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+1|=0$, $|x-1|=0$, $|x|=0$

$\Rightarrow$ los $x$ son $\{-1, 0, 1\}$.

2do Nos separamos en casos (dividimos la recta $\mathbb{R}$)

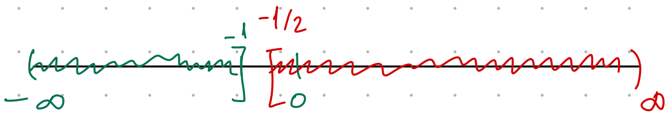
(i) Sea $x \in (-\infty,-1] \Rightarrow x \geq |-x-\cancel{1}-\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{(-x)}|-1$

$$x \geq |-x|-1$$

Como $x \in (-\infty,-1] \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow |-x| = -x$. Continuando,

$$x \geq -x-1 \quad / +x$$
$$2x \geq -1$$
$$x \geq -1/2$$

$$S_i = [-1/2, \infty) \cap (-\infty,-1] = \emptyset$$




(ii) Si $x \in (-1,0] \Rightarrow x \geq |x+1+(-(x-1))-(-x)|-1 \Leftrightarrow x \geq |x+2|-1$

Para $x \in (-1,0] \Rightarrow x+2>0$, continuando

$$x \geq x+2-1 \Leftrightarrow 0 \geq 1$$
$$\Leftrightarrow F$$

$\Rightarrow \quad \therefore S_{ii} = \emptyset$ Ningún $x \in \mathbb{R}$ y $x \in (-1,0]$ puede cumplir la inecuación.

(iii) $x \in (0,1] \Rightarrow x \geq |\cancel{x}+1 + (-(x-1)) - \cancel{x}| - 1$

$$\Leftrightarrow x \geq |-x + 2| - 1$$

Como $x \in (0,1] \Rightarrow -x+2 > 0$ , Continuando

$$\Leftrightarrow x \geq 2 - x - 1 \quad /+x$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1/2$$

$$\therefore S_{iii} = [1/2, \infty) \cap (0,1] = [1/2, 1]$$

(iv) $x \in (1, \infty) \Rightarrow x \geq |x+1 + (x-1) - x| - 1$

$$\Leftrightarrow x \geq |x| - 1$$

Como $x \in (1,\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$ , Continuando

$$\Leftrightarrow x \geq x - 1 \quad /-x$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -1$$

$\Leftrightarrow V$ , esto es una Tautología (Verdadero)

$\Rightarrow \therefore$ todos los reales en $(1,\infty)$ cumplen la inecuación

es decir, $S_{iV} = \mathbb{R} \cap (1,\infty) = (1,\infty)$

Finalmente $S = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} \cup S_{iv} = \phi \cup \phi \cup [1/2, 1] \cup (1,\infty)$

$\boxed{P2}$ (d) Veamos ahora Algo un poco diferente. $|x| - 1 \leq \dfrac{|x-1|}{x}$

Acá se puede directamente ver los $x$ tales que Hacen a los modulos 0.

Los llamados "puntos de Corte". Notemos que $|x| = 0$ y $|x-1| = 0$

Cuando $x = 0$, $x = 1$ Con ellos dividimos la recta $\mathbb{R}$. Además notar

que Si $x = 0$ se indefine la fracción, por lo tanto $0 \notin S$.

Caso (i): $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ Tenemos $-x - 1 \leq \dfrac{-(x-1)}{x}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x + 1 + \frac{1-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2 + \cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2+1}{x}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 1$ , Solo nos interesan los $x > 0$.

Dado que $x \in (-\infty, 0)$ en (i) $\Rightarrow S_i = (0,\infty) \cap (-\infty, 0) = \phi$.

Caso (ii): Si $x \in [0,1) \Rightarrow$ tenemos como inecuación:

$$x - 1 \leq \frac{-(x-1)}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x + \frac{1-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\cancel{x} - x^2 + 1 - \cancel{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

Como $x \in [0,1) \Rightarrow x^2 - 1 < 0$, Por esto solo nos interesan los $x > 0$

$$\Rightarrow S_{ii} = (0, \infty) \cap [0, 1) = (0, 1)$$

Notar que $x = 0$ no puede ser solución, pues indefine la fracción.

Caso (iii) Si $x \in [1, \infty)$. $\Rightarrow$ tenemos como inecuación:

$$|x| - 1 \leq \frac{|x-1|}{x} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x - \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\cancel{x} - x^2 - \cancel{x} + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} \leq 0$$

Notar que como $x \in [1, \infty) \Rightarrow x > 0$. Solo nos interesan los $x^2 - 1 \leq 0$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \ /\sqrt{\ } \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$S_{iii} = [-1, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}.$$

Finalmente: $S = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} = \phi \cup (0,1) \cup \{1\} = (0, 1].$

$\boxed{P2}$ (g)

Acá vamos a ver una forma para poder multiplicar los términos de los denominadores, cosa que en general no se puede y no se recomienda hacer, pues se desconoce el signo del término a multiplicar.

Tenemos:
$$\frac{|x+2|}{x-6} - \frac{x-1}{|x-3|} < 0$$

Notemos los puntos "críticos" (Especiales)

(1) los que indefinen las fracciones: $\{6, 3\} = A_1$

(2) los que hacen 0 al numerador: $\{-2, 1\} = A_2$

(3) los que Hacen 0 a los Valores absolutos: $\{-2, 3\} = A_3$

Escribamos la inecuación para tener valores a ambos lados:

$$\frac{|x+2|}{x-6} < \frac{x-1}{|x-3|}$$

Caso i: Sea $x \in \underbrace{(-\infty, 6)}_{\text{Primer intervalo}} \setminus \underbrace{\{3\}}_{}$

no puede ser $x=3$, pues indefine la fracción.

$\Rightarrow$ $x-6<0$, Además siempre $|x-3|>0$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\Rightarrow$ Vamos a poder multiplicar la inecuación. (Sabemos el signo)

Nos queda $\dfrac{|x+2|}{x-6} < \dfrac{x-1}{|x-3|}$ $/ \cdot (x-6) \cdot |x-3|$

$\Leftrightarrow$ $|x+2| \cdot |x-3| > (x-1)(x-6)$

Ahora debemos eliminar los valores absolutos, para ello ocupamos $A_3 = \{-2, 3\}$ y $A_1 = \{6, 3\}$

Vamos a tener $(-\infty, -2)$ $(-2, 3)$ $(3, 6)$ $(6, \infty)$ en total.

Como estamos en Caso (i) $x \in (-\infty, 6) \setminus \{3\}$. $\Rightarrow$ Nos sirve $(-\infty, -2), (-2, 3), (3, 6)$ y sin $\{3\}$.

Subcaso (i.1) Sea $x \in (-\infty, -2)$

$$-(x+2) \cdot -(x-3) > (x-1)(x-6)$$

$$\cancel{x^2} - x - 6 > \cancel{x^2} - 7x + 6 \quad /+6+7x$$

$$6x > 12$$

$$x > 2$$

$$S_{i.1} = (2, \infty) \cap (-\infty, 6) \setminus \{3\} = (2, 6) \setminus \{3\}$$

Subcaso (i.2) Sea $x \in (-2, 3)$

$$|x+2| \cdot |x-3| > (x-1)(x-6)$$

$$(x+2) \quad (-x+3) > (x-1)(x-6)$$

$$-x^2 + x + \cancel{6} > x^2 - 7x + \cancel{6} \quad /+x^2 - x$$

$$0 > 2x^2 - 8x$$

$$0 > x^2 - 4x \Leftrightarrow 0 > (x-2)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 4 > (x-2)^2 \quad \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 > |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x-2 < 2 \quad / +2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x < 4$$

$$x \in (0,4).$$

$$S_{i.2} = (0,4) \cap (-2,3) = (0,3).$$

**SubCaso (i.3)** Sea $x \in (3,6) \Rightarrow \quad |x+2| \cdot |x-3| > (x-1)(x-6)$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x-3) > (x-1)(x-6)$$

Notar que es igual a como nos quedó en Subcaso (i.1)

$$\Rightarrow \quad S_{i.3} = S_{i.1} = (2,6) \setminus \{3\}$$

**Caso (ii)** Si $x \in (6, \infty)$. $\Rightarrow (x-6) > 0$, y $|x-3| > 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+2|}{x-6} < \frac{x-1}{|x-3|} \quad / \cdot (x-6) \cdot |x-3|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x+2| \cdot |x-3| < (x-1)(x-6)$$

Recordemos que nuestros intervalos para eliminar los valores absolutos eran los definidos por $A_1, A_3$: $(-\infty,-2)$ $(-2,3)$ $(3,6)$ $(6,\infty)$

Pero como estamos en caso (ii) $x \in (6,\infty)$. $\Rightarrow$

Vamos a tener solo que analizar cuando $x \in (6,\infty)$.

$$\Rightarrow \quad |x+2| \cdot |x-3| < (x-1)(x-6)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x-3) < (x-1)(x-6)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x^2} - x - 6 < \cancel{x^2} - 7x + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < -6x + 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x < 12 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

$$S_{ii} = (-\infty, 2) \cap (6, \infty) = \emptyset.$$

$\therefore$ finalmente la solución es $(2,6)\setminus\{3\} \cup (0,3) = (0,3) \cup (3,6) = (0,6) \setminus \{3\}$.

Este método es algo diferente y lo encuentro un poco engorroso.

**P3** Sea $\alpha > 0$ fijo, se definen los ctos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid +x^{2024} + \alpha^2 - x^2 > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 - x^2 > 0\}$$

1ero: Vamos a encontrar los $x \in B$ y luego que $B \subseteq A$.

2do: ¿$\exists x < 0$ Tq $x \in A$?

Resolvamos lo 1ero. Notar que $x \in B$ ssi $x \in \mathbb{R} \wedge \alpha^2 - x^2 > 0$.
entonces trabajemos lo que nos dá mayor info.

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 - x^2 > 0 \\
\iff & \alpha^2 > x^2 \quad /\sqrt{(\ )} \quad , \text{ como } \alpha > 0 \\
\iff & \alpha > |x| \\
\iff & |x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha \\
\iff & x \in (-\alpha, \alpha).
\end{aligned}$$

¿Como Vemos que Ahora $B \subseteq A$? Puede ser Por inclusión

Demostremos que Si $x \in B \implies x \in A$.

Dem Sea $x_0 \in B \Rightarrow$ cumple que $\alpha^2 - x_0^2 > 0 \wedge x_0 \in \mathbb{R}$

Como $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^{2024} \geq 0$, pues $x^{2024} = (x^{1012})^2 \geq 0$

$\implies$ Dado $x_0 \in B$ se cumple que $x_0^{2024} \geq 0$

$$\implies x_0^{2024} + \alpha^2 - x_0^2 \geq \alpha^2 - x_0^2 > 0$$

$$\implies x_0^{2024} + \alpha^2 - x_0^2 > 0, \text{ para } x_0 \in B.$$

$\implies$ $x_0 \in A$ necesariamente, pues tambien cumple la desigualdad de define A.

$$\therefore B \subseteq A.$$

Respondamos lo 2do ¿$\exists x < 0$ Tq $x \in A$?

Sabemos de Antes que $x \in B$ ssi $x \in (-\alpha, \alpha)$.

y Si $x \in B \implies x \in A$, ya que $B \subseteq A$.

Entonces Basta tomar $x = -\alpha/2$ por ejemplo.