

MA1001 Introducción al cálculo.**Profesor:** Cristián Reyes.**Auxiliares:** Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.**Fecha:** 9 de Abril de 2024**Ingeniería Matemática**
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 5: Secciones Cónicas y Funciones

- P1.-** Determine si las siguientes ecuaciones corresponden a la de una parábola, elipse o hipérbola, especificando su foco, directriz y excentricidad:
- a) $6x + 1 + 8y^2 = -x^2$
 - b) $28x^2 + 56y = 84x + 8y^2 + 91$
 - c) $3y^2 + x^2 + 5x = 1$
 - d) $5x + y^2 + \sqrt{7}y = 1 + x^2$
 - e) $5x + x^2 = 3 - y$
- P2.- [Propuesto]** Demuestre que las hipérbolas $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ tienen las mismas asíntotas. Además, demuestre que la suma de los cuadrados de los recíprocos de las excentricidades es uno.
- P3.-** Considere la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, y sea L la recta tangente a la elipse en $P = (u, v)$, y sean Q y R los puntos donde intersecta la recta L con las tangentes a la elipse en sus vértices. Demuestre que la circunferencia que tiene por diámetro a la recta QR pasa por los focos de la elipse.
Indicación: Use que la pendiente m de la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto (u, v) , cumple que $b^2u + a^2vm = 0$.
- P4.- [Propuesto]** Considere la parábola $y^2 = 4px$, con $p > 0$. Se trazan dos rectas verticales, una por el foco F de la parábola y la otra por un punto M cualquiera de su eje, las que cortan a la parábola en los puntos superiores T y P respectivamente. La tangente en T a la parábola corta a la vertical MP en R . Demuestre que $\overline{FP} = \overline{MR}$
Indicación: Use que la pendiente m de la recta tangente a la parábola cumple que $2pm = y$.

P5.- Dibuje las siguientes funciones, determine su dominio y recorrido, e intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuáles son pares? ¿e impares? ¿hay alguna periódica?

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 4 - \sqrt{9 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$

c) $f(x) = \frac{6x^3}{x - 2}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$

P6.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son grafos de funciones?

a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 6\}$

d) $\{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(x, y) : y^2 - x^2 = 1, y \geq 0\}$

e) $\left\{ (x, y) : y = x - 1 + \frac{1}{x} \right\}$

c) $\{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$

P7.- [Propuesto] Sean $A, B \subseteq X$ y sean $f, g : B \rightarrow X$, y $h : A \rightarrow B$. Pruebe que:

a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

b) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

c) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

P8.- [Propuesto] Sean a, b, c, d números reales fijos, y f, g polinomios definidos por las ecuaciones:

$$f(x) = ax + b \quad g(x) = cx + d$$

¿Para qué valores de a, b, c, d se cumple que $f \circ g = g \circ f$?