MA1001 Introducción al cálculo.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 7 de Mayo de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 8: Axioma del Supremo y Trigonometría

P1.- **[Fórmula de Herón]** Herón de Alejandría en el siglo I de nuestra era, aseguraba que el área de un triángulo es:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde p es la mitad del perímetro del triángulo de lados a, b y c, demuestre que Herón estaba en lo correcto.

P2.- Resuleva la ecuación $\cos(x)\sin^2(x) - \sin(x)\cos^2(x) - \cos(x) = 0$.

P3.- Demuestre que el supremo de $A = \left\{ \dfrac{3n+1}{4n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$ es $\dfrac{3}{4}$.

P4.- Considere el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : \sin(1/x) = 0\}$, determine si tiene mínimo, máximo, ínfimo y/o supremo, de existir, explicítelos.

Resumen

- **[Acotamiento de conjuntos]**
  - **[Acotado inferiormente]** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice *acotado inferiormente* si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que:

    $$m \leq x, \quad \forall x \in A$$

    a todo m que cumpla esto se le dice **cota inferior** de A. Si además $m \in A$, se le llama **mínimo**, el cual es único.
  - **[Acotado superiormente]** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice *acotado superiormente* si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que:

    $$x \leq M, \quad \forall x \in A$$

    a todo M que cumpla esto se le dice **cota superior** de A. Si además $M \in A$ se le llama **máximo**, el cual es único.
- **[Supremo e Infimo]**
  - **[Supremo]** Se le llama *supremo* a la **menor de las cotas superiores** de un conjunto. Si existe máximo, es igual al supremo.
  - **[Ínfimo]** Se le llama *ínfimo* a la **mayo de las cotas inferiores** de un conjunto. Si existe mínimo, es igual al ínfimo.
- **[Axioma del Supremo]** Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
- **[Propiedad arquimediana]**

  $$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \cdot x > 1$$

- **[Densidad de los racionales]** Los racionales son densos en los reales, lo que es equivalente a:

  $$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y$$