MA1001 Introducción al cálculo.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 28 de Mayo de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 10: Sucesiones

P1.- [Teorema del Sandwich] Utilice el teorema del sandwich para encontrar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n^4-1)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i\cdot n}{n^3+i}$

e) **[Propuesto]** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+\frac{1}{a^n}}$, con $a>0$.

P2.- Sea la sucesión $(h_n)_n$ nula, tal que $(nh_n)_n$ también es nula, demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty}(1+h_n)^n = 1$$

P3.- a) Si $(a_n)_n$ es nula, entonces $(\sin(a_n))_n$ es nula.

b) Si $(a_n)_n$ converge a l, entonces $(\sin(a_n))_n$ converge a $\sin(l)$.

c) Si $(a_n)_n$ converge a l, entonces $(\cos(a_n))_n$ converge a $\cos(l)$.

P4.- [Control 5, Otoño 2008] Considere las sucesiones $(X_n)_n$, $(Y_n)_n$, definidas como:

$$X_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} \qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n\cdot n!}$$

a) Pruebe que ambas sucesiones son monótonas.

b) Usando lo anterior, demuestre que ambas sucesiones convergen, lo hace al mismo límite l, y que $\forall n \geq 1$, $X_n < l < Y_n$.

c) Demuestre que $2{,}5 < l < 2{,}75$.

d) Pruebe que $l \notin \mathbb{Q}$

Resumen

- **[Teorema]** Sean $(u_n)_n$ y $(w_n)_n$ sucesiones convergentes a u y w respectivamente. Si existe n_0 tal que $\forall n \geq n_n$ se cumple que:

$$u_n \leq w_n$$

entonces $u \leq w$.

- **[Teorema del Sandwich]** Sean $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ y $(w_n)_n$ sucesiones reales. Si $(u_n)_n$ y $(w_n)_n$ convergen al número real l y además

$$(\exists n_n \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

entonces la sucesión $(v_n)_n$ converge, y $\lim v_n = l$.

- **[Desigualdad de Bernoulli I]** Para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo $h > -1$, se cumple que:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

- **[Desigualdad de Bernoulli II]** Para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo $h > 0$, se cumple que:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

- **[Desigualdad de Bernoulli III]** Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $u \in (-1, \frac{1}{n})$, se cumple que:

$$(1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}$$

- **[Monotonía de sucesiones]** Sea $(s_n)_n$ una sucesión real, entonces:

  - Diremos que $(s_n)_n$ es creciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \geq s_n$.
  - Diremos que $(s_n)_n$ es decreciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \leq s_n$.

  Si no se especifica n_0 se asume que toda la sucesión es creciente/decreciente, en tal caso se habla de una sucesión *monótona*. Si se habla de creciente/decreciente estrictamente, es la misma definición pero cambiando $\geq$ por $>$, o $\leq$ por $<$.

- **[Teorema de las sucesiones monótonas]** Si $(s_n)_n$ es una sucesión creciente a partir de n_0 y acotada superiormente, entonces es convergente y :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \geq n_0\}$$

Si $(s_n)_n$ es decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente, entonces es convergente y :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \inf\{s_n : n \geq n_0\}$$

- **[Límites importantes]**

  i) $(q^n)_n$, con $q \in \mathbb{R}$:
    - Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$
    - Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
    - Si $|q| > 1$, entonces la sucesión (q^n) no es acotada, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ no existe.
    - Si $q = -1$, la sucesión (q^n) es acotada, pero no converge.

  ii) $((q_n)^n)_n$, con $q_n \longrightarrow q$:
    a) Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n)^n = 0$
    b) Si $|q| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n)^n$ no existe.
    c) Si $|q| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n)^n$ puede o no existir.

  iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a \in \mathbb{R}^+$.

  iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, si $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.

  v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

  vi) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$, para $k \in \mathbb{N}$, $|q| < 1$.

  vii) Si $(h_n)_n$ es nula y $(nh_n)_n$ también es nula, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (1+h_n)^n = 1$.