MA1001 Introducción al cálculo.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 11 de Junio de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 12: Límites de Funciones

P1.- Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{ax}-1}{x-1}$, con $a \in \mathbb{R}^+$

c) $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

d) **[Propuesto]** $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{e^{2x^2+x-1}-e^{x^2+x+1}}{x^2-2}$

P2.- Decimos que una $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple que $\exists L>0,\ \forall x_1,\ x_2\in\mathbb{R},\ |f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$, cumple la propiedad de *Lipschitz*. Demuestre que toda función que cumple esta propiedad es tal que:

$$\text{Para toda sucesión } (x_n)_n, \qquad x_n \to \overline{x} \implies f(x_n)\to f(\overline{x})$$

Muestre además que la función $\sin(x)$ es lipschitz, mientras que x^2 no lo es.

P3.- Sean las funciones:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, &\quad f(x)=\frac{\sin x}{x} \\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, &\quad g(x)=[x+1/2] \\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, &\quad h(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}\end{aligned}$$

a) Demuestre que existen los límites $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$.

b) ¿Qué pasa con los límites $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)$ y $\lim_{x\to 0}(h\circ g)(x)$?

c) ¿Qué puede decir acerca del teorema de las composiciones? ¿Falla alguna hipótesis?