MA1001 Introducción al cálculo.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 4 de Julio de 2024

Límites de funciones III y derivadas

P1.- Calcule, en caso de existir los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

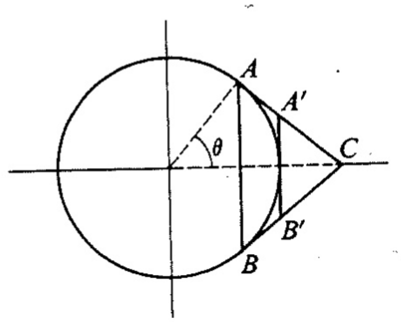
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\ln(3x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x^2)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x) + x\sin(x))^{\frac{1}{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

P2.- Encuentre las asíntotas de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{(2x+1)^2}{(x-5)}$.

P3.- Se trazan las tangentes a un arco circular en sus extremos y punto medio, como indica la figura. Sean Δ y Δ' las áreas de los triángulos ABC y $A'B'C'$, respectivamente. Probar que el cociente Δ/Δ' tiende a 4 cuando la longitud del arco tiende a cero.



Resumen

- **[Unicidad del límite]** Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_2$, entonces $l_1 = l_2$.

- **[Álgebra de límites]** Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l_2$ y $A \cap B$ es no acotado superiormente, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} (f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}, \qquad sil_2 \neq 0$$

- **[Sandwich]** Si tres funciones f, g, h con dominios A, B, C respectivamente son tales que $\exists m$, tal que $\forall x \in B \cap [m, \infty)$ se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Entonces, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) l$, entonces $\lim_{x\to\infty} g(x) = l$.

- **[Asíntotas horizontales]** Se definen:
  i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ entonces la recta $y = l_1$ se le dice asíntota horizontal de f.
  ii) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ entonces la recta $y = l_2$ es otra asíntota horizontal de f.

- **[Asíntotas verticales]** Si $\exists \bar{x}$ tal que $\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta $x = \bar{x}$ es una asíntota vertical de f.

- **[Asíntotas oblicuas]** Se define:
  1. La recta $y = m_1x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se cumple que
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (m_1x + n_1) = 0$$
  en particular
  $$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_1x$$
  2. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (m_2x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.

- **[Teorema de la composición]** Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Entonces, si el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente, se cumple que
$$\lim_{x\to+\infty} (f \circ g)(x) = l$$

[Límites hacia $\pm\infty$] Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea l un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente, entonces
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty),\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

ii) Si A no es acotado inferiormente, entonces
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m],\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

[Límites igual a $+\infty$] Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$, entonces
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta],\ f(x) \geq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$, entonces
$$\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta],\ f(x) \geq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}),\ f(x) \geq M.$$

4. Si A es no acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\, \exists m > 0,\, \forall x \in A \cap [m, \infty),\ f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\, \exists m < 0,\, \forall x \in A \cap (-\infty, m],\ f(x) \geq M.$$

[Límites igual a $-\infty$] Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\bar{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta],\ f(x) \leq M.$$

2. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\bar{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in A \cap (\bar{x}, \bar{x} + \delta],\ f(x) \leq M.$$

3. Si $\bar{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x}),\ f(x) \leq M.$$

4. Si A es no acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\, \exists m > 0,\, \forall x \in A \cap [m, \infty),\ f(x) \leq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\, \exists m < 0,\, \forall x \in A \cap (-\infty, m],\ f(x) \leq M.$$

[Límite igual a l^+ o l^-]

1. Diremos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^+$ si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} = l \text{ y } \exists m > 0, m \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty),\ f(x) > l$$

2. Diremos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^-$ si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} = l \text{ y } \exists m > 0, m \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [m, +\infty),\ f(x) < l$$

3. Diremos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^+$ si se cumple que

$$\lim_{x \to -\infty} = l \text{ y } \exists m < 0, m \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [-\infty, m),\ f(x) > l$$

4. Diremos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^-$ si se cumple que

$$\lim_{x \to -\infty} = l \text{ y } \exists m < 0, m \forall x \in \text{Dom}(f) \cap [-\infty, m),\ f(x) < l$$