PAUTA AUXILIAR 5
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO S9.
OTOÑO 2024
IGNACIO DAGACH ABUGATTAS

P1. Para comenzar

Determine, según corresponda, asíntotas verticales, horizontales y dominio de la siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8}$

NOTAR QUE:

$$f(x) = \frac{-(x^2+3x-2)}{x^2-1} = \frac{-(x^2-3x+2)}{x^2-1} = \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8} = \frac{6(x^2+3x-10)}{x^2-6x+8} = \frac{6(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

NOTAR QUE $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $g(x) = \frac{P'(x)}{Q'(x)}$

donde P, P', Q, Q' son funciones polinómicas del mismo grado, por tanto las asíntotas horizontales para estos serán

PARA f, la recta $y = \frac{a_n}{b_n} = \frac{-1}{1} = -1$

PARA g, la recta $y = \frac{a'_n}{b'_n} = \frac{6}{1} = 6.$

los dominios serán el lugar geométrico donde nuestras funciones tienen sentido (NO se indeterminan)

$\Longrightarrow$

$\mathrm{DOM}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\mathrm{DOM}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$

las asintotas verticales serán los ceros exclusivos del denominador de cada función

i.e.

las asintotas verticales serán:

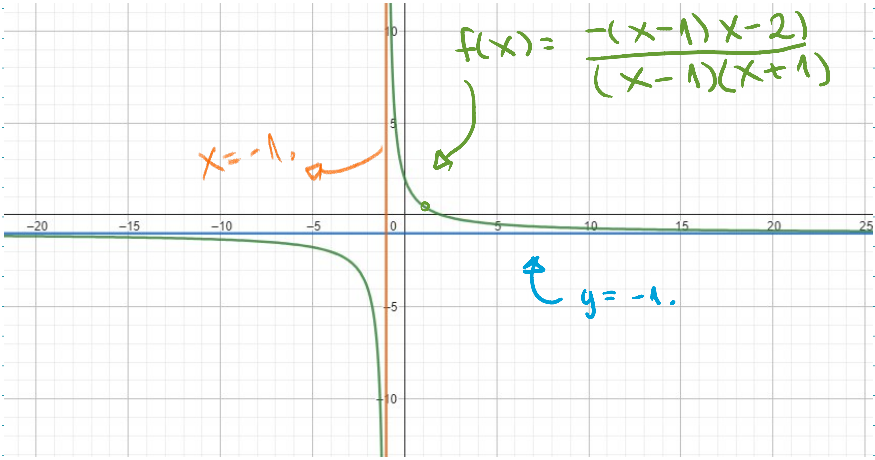
PARA f: La recta $x = -1$

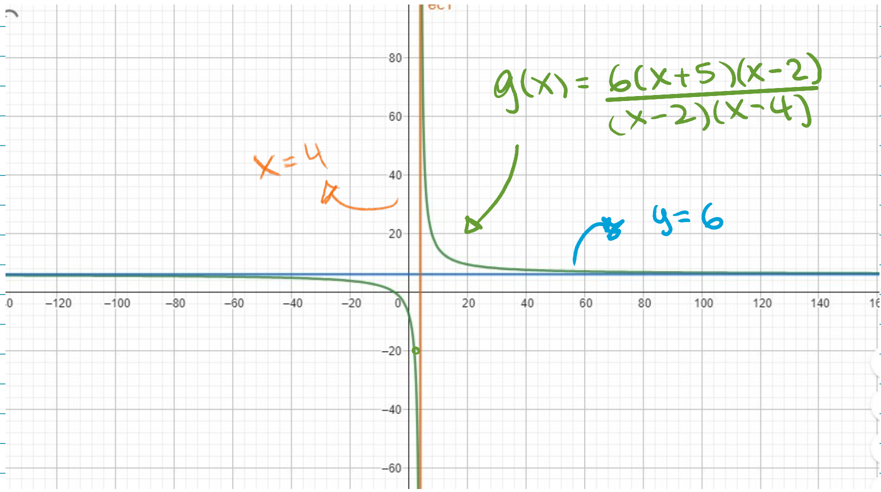
PARA g: La recta $x = 4$

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-2)}{x^2-1} = \frac{-(x^2-3x+2)}{x^2-1} = \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{6x^2+18x-60}{x^2-6x+8} = \frac{6(x^2+3x-10)}{x^2-6x+8} = \frac{6(x+5)(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

Gráfico de geogebra en sig. página :)


f(x) = -(x-1)(x-2) / (x-1)(x+1)
x = -1.
y = -1.


g(x) = 6(x+5)(x-2) / (x-2)(x-4)
x = 4
y = 6

P2. Matraca

Considere la funcion f dada por $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ y determine:

a) Dominio, Imagen, ceros y signos

b) Inyectividad de f

c) ¿Existe $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f)$? Si es así entregue una formulación explícita de la misma

d) Crecimiento de f en el intervalo $(-\infty, -1/2)$

Solución: Tenemos que

P2 a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \neq 0\}.
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

Notemos que el denominador se anula cuando $2x + 1 = 0$, es decir, cuando $x = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

(0.5 pts)

Por otro lado,

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Veamos qué restricción debe satisfacer un $y \in \mathbb{R}$ para que exista un $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $y = f(x)$. Esto es,

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff y = \frac{x+1}{2x+1} \qquad \textbf{(0.5 pts)} \\
&\iff y(2x+1) = x + 1 \\
&\iff 2xy + y = x + 1 \\
&\iff y - 1 = x(1 - 2y) \\
&\iff x = \frac{y-1}{1-2y},
\end{aligned}$$

donde en el último paso se requiere que $1 - 2y \neq 0$, es decir, $y \neq \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Para encontrar los ceros de la función, debemos encontrar los valores $x \in \mathrm{Dom}(f)$ para los cuales $f(x) = 0$. Para ello,

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff \frac{x+1}{2x+1} = 0 \\
&\iff x + 1 = 0 \\
&\iff x = -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es igual a cero cuando $x = -1$. **(0.5 pts)**

Finalmente, para determinar los signos de la función, consideremos los puntos críticos $x = -1, -\frac{1}{2}$ y evaluemos la función en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}, \infty)$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{2x+1}$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la función es positiva en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$ y negativa en $(-1, -\frac{1}{2})$. **(0.5 pts)**

P2. Matraca

Considere la funcion f dada por $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ y determine:

a) Dominio, Imagen, ceros y signos

b) Inyectividad de f

c) ¿Existe $f^{-1} : \text{Im}(f) \to \text{Dom}(f)$? Si es así entregue una formulación explícita de la misma

d) Crecimiento de f en el intervalo $(-\infty, -1/2)$

Solución: Veamos primero que $f : \text{Dom}(f) \to \text{Im}(f)$ es inyectiva. Para demostrar la inyectividad, tomamos $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, y debemos probar que $x_1 = x_2$. Veamos

P2,b,C)

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1} \\
&\iff (x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1) \qquad \textbf{(0.3 pts)} \\
&\iff 2x_2 + x_1 = 2x_1 + x_2 \\
&\iff x_2 = x_1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f es inyectiva. **(0.2 pts)**

Además, como $f : \text{Dom}(f) \to \text{Im}(f)$ es inyectiva y $\text{Cod}(f) = \text{Im}(f)$ (es epiyectiva), entonces f es biyectiva y, por tanto, posee inversa $f^{-1} : \text{Im}(f) \to \text{Dom}(f)$. **(0.5 pts)**

Finalmente, la expresión de f^{-1} se puede encontrar al "despejar" x (cálculos precedentes). Así, para todo $x \in \text{Im}(f)$, vamos a tener que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}.$$

(0.5 pts)

P2,D)

Solución: Veamos que f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Al ser f inyectiva, la desigualdad es automáticamente estricta **(0.5 pts)**.

Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ tales que $x_1 < x_2$ **(0.2 pts)**. Luego,

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 > 0 &\iff (2x_2+1)(x_1+1) - (2x_1+1)(x_2+1) > 0 \qquad \textbf{(0.3 pts)} \quad \text{(Ver desarrollo anterior)} \\
&\iff \frac{(2x_2+1)(x_1+1) - (2x_1+1)(x_2+1)}{(2x_1+1)(2x_2+1)} > 0 \\
&\iff \frac{x_1+1}{2x_1+1} - \frac{x_2+1}{2x_2+1} > 0 \qquad \textbf{(0.3 pts)} \\
&\iff f(x_1) > f(x_2).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$. **(0.2 pts)**

P3. De controles

Considere la funcion f dada por $f(x) = |x| - \sqrt{1-|x|}$ y determine:

a) Dominio, paridad, ceros y signos

b) Crecimiento de f

c) Imagen de f

d) Inversa de $f|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)}$

P3(a)

Para el dominio A debemos encontrar los valores de x tal que $\sqrt{1-|x|} \in \mathbb{R}$. Esto es, se debe satisfacer que $|x| \leqslant 1$, por lo que A=[-1,1]. (0.5 ptos.) = Dom(f)

En el intervalo [0,1], los ceros cumplen $0 = x - \sqrt{1-x} \implies x = \sqrt{1-x} \implies x^2 = 1-x$. De aquí se obtiene una cuadrática que tiene sólo una solución en el intervalo: $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. (0.25 ptos) cero.

En el intervalo [-1,0), los ceros cumplen $0 = -x - \sqrt{1+x} \implies x = -\sqrt{1+x} \implies x^2 = 1+x$. De aquí se obtiene una cuadrática que tiene sólo una solución en el intervalo: $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (0.25 ptos) cero

Nota: también se puede haber observado la paridad antes y así buscar solo los ceros en los positivos (o negativos).

signos

Dados los ceros de la función hay tres intervalos a considerar para los signos. La función es positiva en $[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, negativa en $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, y positiva en $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1]$. Para esto basta evaluar algunos puntos, por ejemplo, $f(-1) = 1$, $f(0) = -\sqrt{1}$ y $f(1) = 1$. (0.5 ptos)

Además, la función es par, ya que $f(-x) = |-x| - \sqrt{1-|-x|} = |x| - \sqrt{1-|x|} = f(x)$, por la paridad del valor absoluto. (0.5 ptos) Paridad.

P3. De controles

Considere la funcion f dada por $f(x) = |x| - \sqrt{1-|x|}$ y determine:

a) Dominio, paridad, ceros y signos

b) Crecimiento de f

c) Imagen de f

d) Inversa de $f\big|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)}$

P3, b, c)

La función es decreciente en $[-1,0)$ y creciente en $[0,1]$. Para ver que es decreciente en $[-1,0)$, consideremos $x, y \in [-1,0)$, con $x < y$. Como $-x > -y$ y $-\sqrt{1+x} > -\sqrt{1+y}$, al sumar estas dos desigualdades se obtiene que $f(x) = -x - \sqrt{1+x} > -y - \sqrt{1+y} = f(y)$ (0.5 ptos.)

Para ver que es creciente en $[0,1]$ basta tomar $x, y \in [0,1]$, con $x < y$ y de forma análoga llegamos a que $f(x) = x - \sqrt{1-x} > y - \sqrt{1-y} = f(y)$. (0.5 ptos.)

Nota: por la paridad de f, también basta analizar el crecimiento solo para los positivos (o negativos).

El conjunto imagen es $[-1,1]$. La función es decreciente en $[-1,0]$ y $f(-1) = 1$, $f(0) = -\sqrt{1} = -1$. Así $f([-1,0]) = [-1,1]$. La función es creciente en $[0,1]$ y $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Así, $f([0,1]) = [-1,1]$. Se concluye que $f(A) = f([-1,0]) \cup f([0,1]) = [-1,1]$. (0.2 ptos. por la respuesta, 0.8 ptos. por justificar adecuadamente.)

P3) D) inversa de $f|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)}$

f en el $[-1,0)$ es inyectiva pues:

dados $x,y\in[-1,0)$ con $x\neq y$

spg $x<y$

[[redacted], consideremos $x,y\in[-1,0)$, con $x<y$. Como $-x>-y$ y $-\sqrt{1+x}>-\sqrt{1+y}$, al sumar estas dos desigualdades se obtiene que $f(x)=-x-\sqrt{1+x}>-y-\sqrt{1+y}=f(y)$ (0.5 ptos.)

y en particular $f(x)\neq f(y)$

la imagen de f en el $[-1,0)$ es $(-1,1]=\mathrm{Im}\left(f|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)}\right)$

Pues $f(-1)=1$

y $f(0)=-1$

y f es decreciente en el $[-1,0)$

$\Longrightarrow$ $\exists f^{-1}$ $\mathrm{Im}\left(f|_{\mathrm{Dom} f\cap(-\infty,0)}\right)\to\mathrm{Dom}(f)\cap(-\infty,0)$

$f^{-1}:(-1,1]\to[-1,0)$ es tal que

$A\cap(-\infty,0)=[-1,0)$. Necesitamos entonces encontrar la inversa de $f(x)=-x-\sqrt{1+x}$. Tomando $y=f(x)$, se tiene $y+x=-\sqrt{1+x}\implies y^2+2xy+x^2=1+x\implies$

$$x^2+(2y-1)x+y^2-1=0.$$

Esta es una cuadrática con soluciones de la forma

$$x=\frac{1-2y\pm\sqrt{5-4y}}{2}.\quad\text{(1 pto.)}$$

Se debe tomar un sólo signo para que sea función (0.2 puntos). Si $y=1$ la expresión arriba nos arroja $x=-1$, pues $f(-1)=1$, y esto sólo ocurre cuando tomamos el signo menos (0.6 puntos). Así, la inversa es $f^{-1}:(-1,1]\to[-1,0)$ con

$$f^{-1}(x)=\frac{1-2x-\sqrt{5-4x}}{2}.\quad\text{(0.2 ptos.)}$$