Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-9 - Otoño 2024 – Introducción al Cálculo

Auxiliar 7: Trigonometría II

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

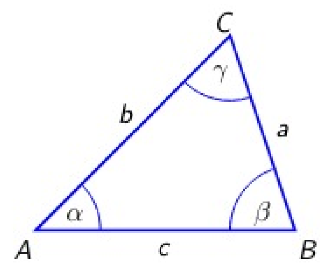
P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin(\frac{x}{4}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

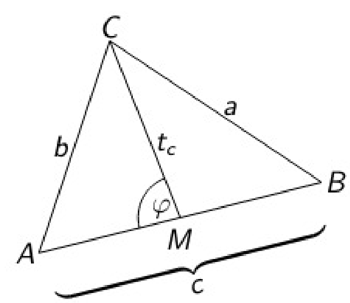


P2. Matraca

Considere el triángulo T visto en $P1$ de área A y demuestre que:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2ac\cos(\beta) + 2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$

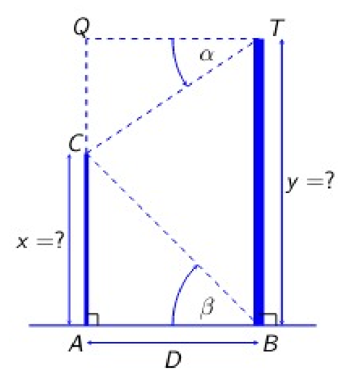


P3. De controles

Considere para la parte a) el triángulo T_1 de la pregunta anterior y para la parte b) la siguiente figura:

a) Demuestre que $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, donde t_c es el largo del segmento CM y CM es la tranversal de gravedad por C de T_1 (une C con el punto medio de AB)

b) Determine los valores x e y, para esto tenga en cuenta que AC y BT están en el plano $ABCT$ y que QT es paralelo a AB



Resumen Auxiliar 7
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

$$cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$sen^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- **[Funciones recíprocas]**: Se definen

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$
$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$
$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

- **[Propiedad]**:
  - Si $cos(x) \neq 0$, entonces $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$
  - Si $sen(x) \neq 0$, entonces $cot^2(x) + 1 = cotan^2(x)$

- **[Propiedad suma y diferencia de ángulos]**

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sen(\beta)$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$

- **[Regla de los cuadrantes]:**
  - $sen(\pi \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
  - $cos(\pi \pm \alpha) = -cos(\alpha)$
  - $cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
  - $sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = cos(\alpha)$

- **[Algunas identidades útiles]:**
  1. $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
  2. $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
  3. $sen(x) \pm sen(y) = 2sen(\frac{x \pm y}{2})cos(\frac{x \mp y}{2})$

Teorema 7.1 (Teorema del Seno).

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = k$$

Teorema 7.2 (Teorema del Coseno).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Definición (Arcocoseno) Llamamos arcocoseno a la función inversa de $f(x) = \cos x$, o sea:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

tal que

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

Definición (Arcoseno) Llamamos arcoseno a la función inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$, es decir:

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

tal que

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \iff x = \operatorname{sen} y$$

Definición (Arcotangente) Llamamos arcotangente a la función inversa de f, o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

tal que

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.
Sin embargo como la función sen no es epiyectiva, esta solución no es única.
La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k\alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de sen.

Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función cos no es epiyectiva, esta solución no es única.
La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de cos.

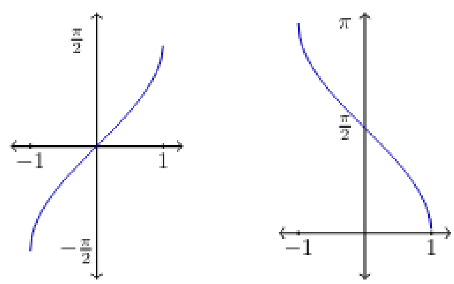
Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$,que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

Sin embargo como la función tan no es epiyectiva, esta no es la única solución.

La solución general suele escribirse en la ecuación

$$x = k\pi + \alpha \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$



Gráficos de arcoseno y arcocoseno.

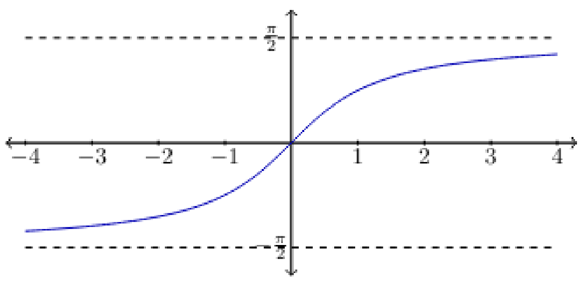


Gráfico de arcotangente.