PAUTA AUXILIAR 7

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

OTOÑO 2024

IGNACIO DAJACH ABUGATTAS

P1) a)

P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin(\frac{x}{4}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

Solución: Consideremos el cambio de variables $y = \frac{x}{4}$. **(0.5 pts)**

Luego, la ecuación dada se transforma en:

$$\begin{aligned} 3 &= 4\sin(y) + 2\cos(2y) \\ &= 4\sin(y) + 2\left(1 - 2\sin^2(y)\right) \\ &= 4\sin(y) + 2 - 4\sin^2(y). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = -1 + 4\sin(y) - 4\sin^2(y)$$

(0.5 pts)

Reorganizando la ecuación resultante, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\sin^2(y) - 4\sin(y) + 1 \\ &= (2\sin(y) - 1)^2. \end{aligned}$$

(0.5 pts)

Esto indica que la ecuación es equivalente a resolver $\sin(y) = \frac{1}{2}$. **(0.5 pts)**

Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \\ &= (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \end{aligned}$$

(0.5 pts)

donde $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente, recordando que $x = 4y$, se tiene:

$$x = 4y = (-1)^k \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

(0.5 pts)

P1) b)

P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

sen(2X) = sen(x)cos(x)

Solución: Usando la identidad de seno del ángulo doble y la identidad fundamental, la ecuación es equivalente a:

$$\iff \quad 2\,\text{sen}(x)\cos^2(x) = 6\,\text{sen}^3(x)$$

0.5

$$\iff \quad \text{sen}(x)\Big(\cos^2(x) - 3\,\text{sen}^2(x)\Big) = 0$$

$$\iff \quad \text{sen}(x)\Big(1 - 4\,\text{sen}^2(x)\Big) = 0$$

NiKiTA NiPoNe con sen²(X)

1.0

$$\iff \quad \text{sen}(x)\Big(1 - 2\,\text{sen}(x)\Big)\Big(1 + 2\,\text{sen}(x)\Big) = 0$$

$$\iff \quad \text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad \text{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

0.5

Las soluciones de cada una de estas ecuaciones es:

$$\text{sen}(x) = 0 \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

0.5

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{2} \iff x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen}(x) = -\frac{1}{2} \iff x = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Resolver una de estas dos =1.0, la segunda +0.5)

1.5

Mechón@ de la sq:
y a mi como se me ocurre ese nikita nipone???

Respuesta:
hay cos² y sen² por montones, eso nos sugiere id. fundamental

P1) c)

P1. Para comenzar

Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

Solución: Para resolver este problema dividiendo la ecuación a ambos lados por 2, obtenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos(x). \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Observando que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos x \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \qquad \textbf{(0.3 pts)}\end{aligned}$$

Así, tomando $y = x + \frac{\pi}{6}$, la ecuación se reduce a

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}(y). \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

La ecuación posee dos soluciones en $[0, 2\pi)$, dadas por $y = \frac{\pi}{6}$ e $y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, o sea, las soluciones para x en dicho intervalo son

$$x = 0, \qquad x = \frac{2\pi}{3}. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Dado que $\operatorname{sen}(x)$ posee periodo 2π, el conjunto solución de esta ecuación está dado por

$$x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

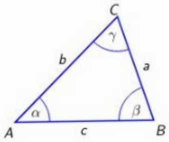
P2 a)

P2. Matraca

Considere el siguiente triángulo T de área A y demuestre que:

a) $a^2+b^2+c^2 = 2ab\cos(\gamma)+2ac\cos(\beta)+2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$



a) i) Por teorema del coseno, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad \text{(0.5 ptos.)}
\end{aligned}
$$

Sumando las tres desigualdades se obtiene:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2bc\cos\alpha - 2ac\cos\beta - 2ab\cos\gamma.$$

Simplificando, se concluye que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

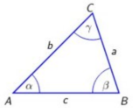
P2 b)

P2. Matraca

Considere el siguiente triángulo T de área A y demuestre que:

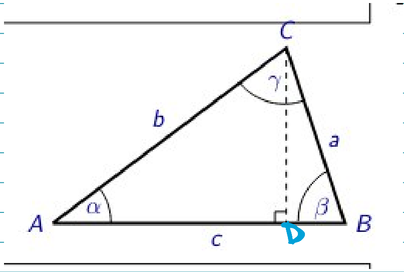
a) $a^2+b^2+c^2 = 2ab\cos(\gamma)+2ac\cos(\beta)+2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$



dibujemos una altura en T considerando que $A = \frac{1}{2} B_T H_T$

con B_T base de T y H_T altura de T



en este caso

$\overline{DC} = H_T$ y $\overline{AB} = c = B_T$

Mirando ADC tenemos que

$\overline{CD} = b \operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} B_T H_T = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\alpha$

estamos así!!! qué hacemos???

¡¡ TEOREMA del SENO !!!

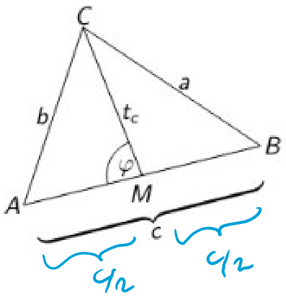
NOTANDO que $K = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = aK$

$\Rightarrow$ tenemos que $A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} bcaK$

$= \frac{1}{2} K abc$ //

P3 a



a) Demuestre que $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, donde t_c es el largo del segmento CM y CM es la transversal de gravedad por C de T_1 (une C con el punto medio de AB)

Solución: Usando el teorema del coseno en $\triangle AMC$ se tiene que: $b^2 = t_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2t_c \frac{c}{2} \cos(\gamma)$

$$\Longrightarrow \quad b^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} - t_c \cdot c \cdot \cos(\varphi). \qquad \boxed{1.0}$$

Usando el teorema del coseno en $\triangle CMB$ se tiene que: $a^2 = t_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2t_c \frac{c}{2} \cos(\pi - \gamma)$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} - t_c \cdot c \cdot \cos(\pi - \varphi). \qquad \boxed{0.5}$$

los T. del coseno pueden estar al reves (el primero vale 1.0 y el otro 0.5)

Usando la identidad $\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi)$ $\boxed{0.5}$ y sumando se obtiene

$$a^2 + b^2 = 2t_c^2 + \frac{c^2}{2}. \qquad \boxed{0.5}$$

de donde la relación pedida resulta de un despeje simple. $\boxed{0.5}$

$$a^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} - t_c c \cos(\gamma)$$

$$b^2 = t_c^2 + \frac{c^2}{4} + t_c c \cos(\gamma)$$

$$a^2 + b^2 = 2t_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$2a^2 + 2b^2 = 4t_c^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \quad //$$

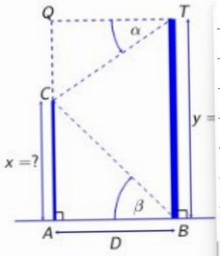
P3 b)

P3. De controles

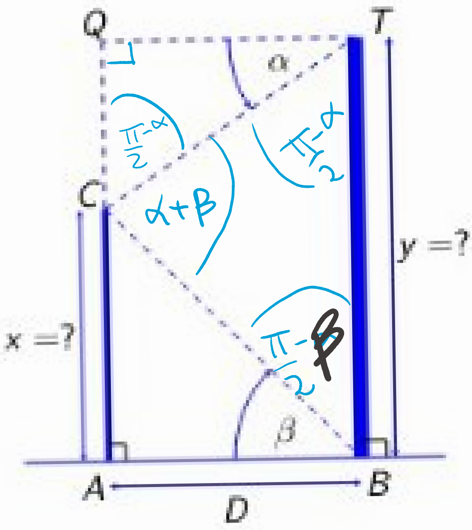
Considere para la parte $a)$ el triángulo T_1 de la pregunta anterior y para la parte $b)$ la siguiente figura:

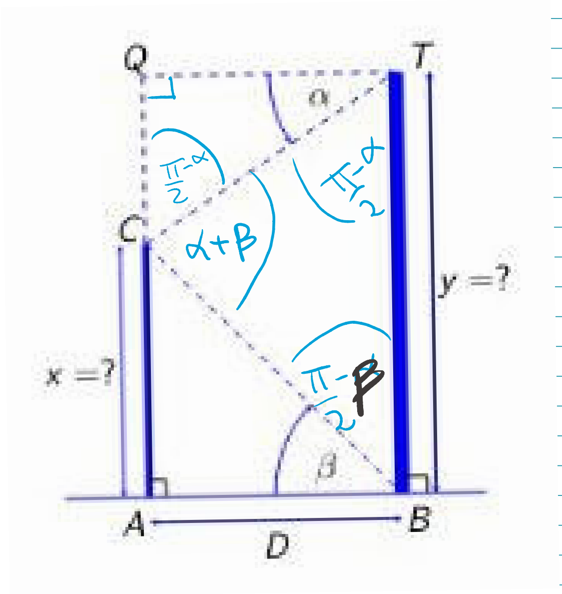
a) Demuestre que $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, donde t_c es el largo del segmento CM y CM es la transversal de gravedad por C de T_1 (une C con el punto medio de AB)

b) Deetermine los valores x e y, para esto tenga en cuenta que AC y BT están en el plano $ABCT$ y que QT es paralelo a AB



completando ángulos





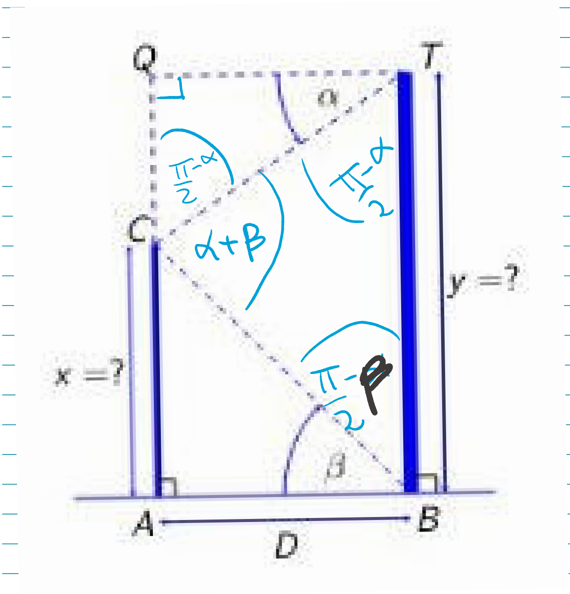
$\Rightarrow$ USANDO el teorema del seno en BCT tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{y} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{|CB|}$$

Pero $|CB|\cos(\beta) = |D| \Rightarrow |CB| = \dfrac{|D|}{\cos(\beta)}$

y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,|D|}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$



además $\quad |CB|\operatorname{sen}(\beta) = x$

$$\frac{D}{\cos(\beta)}\operatorname{sen}(\beta) = x$$

$$D\,\operatorname{tg}(\beta) = x$$