Auxiliar 11: Sucesiones III

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar... ¿el C4?

Dadas las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \sqrt{5 + |a_n|\cos^2(1+\sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = (\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

a) Determine para $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por definición, su límite

b) Demuestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nula

P2. Matraca

Calculelos siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3n+1}{3n-1})^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+e^n)^{1/n}$

P3. De controles

Sea a > 0 y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente según:

- $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ con $x_1 = \sqrt{a}$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa

b) Demuestre que $x_n \leq u, \ \forall n \in \mathbb{N}$, con u el único valor tal que $u^2 = u + a, \ u > 0$

c) Concluya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee límite y calcúlelo

Resumen Auxiliar 11
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión (s_n) converge a ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Teorema 9.1. *Si (s_n) es una sucesión que converge a $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y también a $\ell_2 \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $\ell_1 = \ell_2$.*

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \qquad \text{o bien} \qquad \ell = \lim_n s_n \qquad \text{o bien} \qquad \ell = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA) (s_n) se llamará sucesión nula si $s_n \to 0$.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Teorema 9.2. *Sean (u_n), (v_n) sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas*

1. *(u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.*
2. *Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.*
3. *Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.*
4. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.*
5. *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.*
6. *Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.*

Resumen Auxiliar 11
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

Proposición 9.1. *Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces $s_n \to \ell \iff (s_n - \ell)$ es una sucesión nula.*

Proposición 9.2. *Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente entonces (s_n) es acotada.*

Proposición 9.3 (Álgebra de límites). *Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v, respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ y (λu_n) son también convergentes a $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ y λu, respectivamente.*

Es decir, si $u_n \to u$ y $v_n \to v$ entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

Proposición 9.4. *Si (s_n) es una sucesión nula entonces la sucesión $(\frac{1}{s_n})$, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.*

Proposición 9.6. *Sea (s_n) una sucesión real. Si (s_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces:*

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ tal que s_n tiene el mismo signo de ℓ (es decir $s_n \cdot \ell > 0$).

(2) La sucesión $(\frac{1}{s_n})$ es acotada.

Proposición 9.7. *Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v).*

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
- $$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

  para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

  - si $p < q$, entonces $s_n \to 0$
  - si $p = q$, entonces $s_n \to \frac{a_p}{b_q}$
  - si $p > q$, entonces $\left(\frac{1}{s_n}\right) \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Resumen AUX 11 (GRACIAS gise ☺)

- **Teorema**: Sean (u_n) y (w_n) sucesiones convergentes a u y w, respectivamente. Si existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$u_n \leq w_n$$

entonces $u \leq w$.

- **Teorema del Sandwich**: Sean (u_n), (v_n) y (w_n) sucesiones reales. Si (u_n) y (w_n) convergen al real ℓ y además tal que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\,u_n \leq v_n \leq w_n,$$

entonces la sucesión (v_n) también converge y $\lim v_n = \ell$.

- **Desigualdad de Bernoulli I**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)(1+h)^n \geq 1 + nh$$

- **Propiedad(Sucesión q^n)**:
  1. $\lim q^n = 1$, si $q = 1$
  2. $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$
  3. $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

- **Propiedad(Sucesión$(q_n)^n$)**: Para $q \to q$
  1. $\lim (q_n)^n = 0$, si $|q| < 1$
  2. $\lim (q_n)^n$ no existe, si $|q| > 1$

- **Propiedades:**
  - $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, para $a \in \mathbb{R}^+$
  - $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, para $a_n \to a \in \mathbb{R}^+$

- **Desigualdad de Bernoulli II**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(h > 0), (1+h)^n \geq q + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

o equivalentemente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}$$

- **Propiedades:**
  - $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
  - $\lim n^k q^n = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ y $q \in (-1, 1)$

- **Desigualdad de Bernoulli III**:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \tfrac{1}{n})), (1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}$$

- **Proposición**: Se tiene que

$$\lim (1 + h_n)^n = 1$$

cuando (h_n) y (nh_n) son sucesiones nulas.

- **Definición**: Sea (s_n) una sucesión real. Entonces:
  - Diremos que (s_n) es una sucesión creciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \geq s_n$.
  - Diremos que (s_n) es una sucesión decreciente a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene que $s_{n+1} \leq s_n$.
  - Si una sucesión es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la llamarmos sucesión monótona.

- **Teorema de las sucesiones monótonas**:
  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = sup\{s_n : n \geq n_0\}$$

  - Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = inf\{s_n : n \geq n_0\}$$

- **El número** e: $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente cuyo límite es $\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$.