Auxiliar Extra C6: Límites y el Infinito

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Demuestre que $\lim_{x\to+\infty} x(1-e^{-\frac{1}{x^2}}) = 0$ y utilícelo para calcular la asíntota oblícua hacía $+\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}$.

P2. Matraca

Considere $f(x) = \dfrac{x^2\exp(1\backslash x)}{1+x^2}$.

a) Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

Hint: considere el cambio de variable $u = 1/x$.

P3. De examenes

Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(1 - \dfrac{2}{1+x^2})$.

a) Determine el dominio A de la función.

b) (Propuesto) Determine ceros, signos, paridad e imagen de f.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

d) (Propuesto) Estudie crecimiento y decrecimiento de f.

Resumen Auxiliar Extra C6
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x}+\delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta] \setminus \{\overline{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \left[0 < |x - \overline{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \right].$$

Definición Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Definición (Asíntotas horizontales)

1. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f.

Definición (Límites igual a $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si $\overline{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta], f(x) \geq M.$$

2. Si $\overline{x}$ es punto de acumuluación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x}+\delta], \quad f(x) \geq M.$$

3. Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}), \quad f(x) \geq M.$$

4. Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad f(x) \geq M.$$

5. Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad f(x) \geq M.$$

Definición (Asíntotas verticales) Si $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \overline{x}$ es una asíntota vertical de f.

Definición (Asíntotas oblicuas)

1. La recta $y = m_1 x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se cumple que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (m_1 x + n_1) = 0.$$
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (m_2 x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2 x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.