Auxiliar Extra C6: Límites y el Infinito

Profesor: Matias Pavez Signe
Auxiliares: Gisela Abarca Andereya,
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Demuestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-e^{-\frac{1}{x^2}}) = 0$ y utilícelo para calcular la asíntota oblícua hacía $+\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}$.

P2. Matraca

Considere $f(x) = \dfrac{x^2\exp(1\backslash x)}{1+x^2}$.

a) Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

Hint: considere el cambio de variable $u = 1/x$.

P3. De examenes

Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(1 - \dfrac{2}{1+x^2})$.

a) Determine el dominio A de la función.

b) (Propuesto) Determine ceros, signos, paridad e imagen de f.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

d) (Propuesto) Estudie crecimiento y decrecimiento de f.

Resumen Auxiliar Extra C6
Introducción al Cálculo - MA1001-9 - Otoño 2024
Gisela Abarca Andereya & Ignacio Dagach Abugattas ♡

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta],\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}),\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \left[0 < |x - \overline{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right].$$

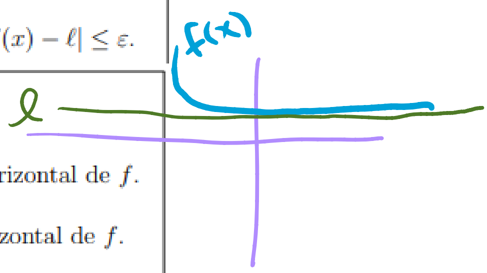
Definición Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

i) Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty),\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

ii) Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m],\quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

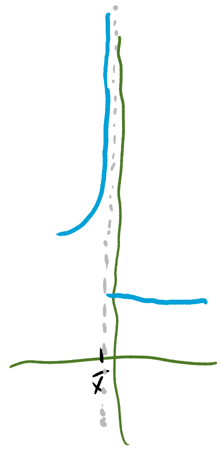


Definición (Asíntotas horizontales)

1. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f.

Definición (Límites igual a $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

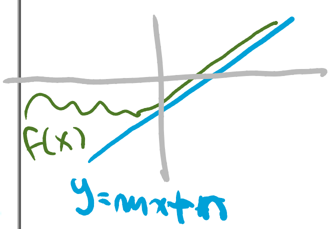
1. Si $\overline{x} \in A'$, entonces
$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta], f(x) \geq M.$$
2. Si $\overline{x}$ es punto de acumuluación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$, entonces
$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta],\quad f(x) \geq M.$$
3. Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces
$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}),\quad f(x) \geq M.$$
4. Si A no es acotado superiormente, entonces
$[m, \infty)$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty),\quad f(x) \geq M.$$
5. Si A no es acotado inferiormente, entonces
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m],\quad f(x) \geq M.$$



Definición (Asíntotas verticales) Si $\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \overline{x}$ es una asíntota vertical de f.

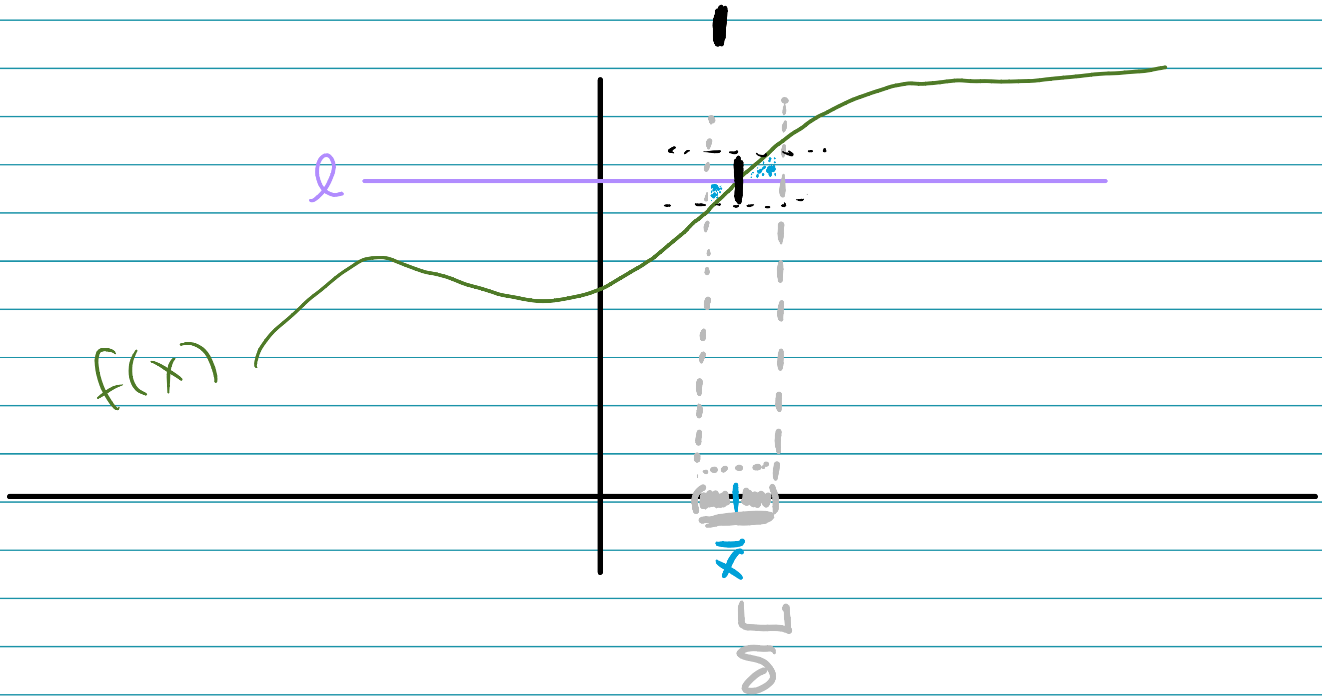
Definición (Asíntotas oblicuas)

1. La recta $y = m_1 x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se cumple que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (m_1 x + n_1) = 0.$$
2. Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (m_2 x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2 x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.



Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta] \setminus \{\overline{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo se escriben:

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \left[0 < |x - \overline{x}| \leq \delta \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leq \varepsilon\right].$$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{P(x)} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$$

P2. Matraca

Considere $f(x) = \dfrac{x^2 \exp(1\backslash x)}{1+x^2}$.

a) Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Determine $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

Hint: considere el cambio de variable $u = 1/x$.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 \exp(1/x)}{1+x^2}$

si $\underline{U = \frac{1}{X}}$ y $X \to 0^+$, $U \to +\infty$

$$\lim_{U\to\infty} \frac{\frac{1}{U^2}\cdot \exp(U)}{1+\frac{1}{U^2}} = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{U^2}\left[\frac{\exp(U)}{1+\frac{1}{U^2}}\right] =$$

$$\lim_{U\to\infty} \frac{\exp(U)}{U^2+1} = \lim_{U\to\infty} \frac{\exp(U)}{P(U)} = \infty$$

O

$$\lim_{X\to 0^-} \frac{X^2 \exp\left(\frac{1}{X}\right)}{1+X^2}$$

si $U = \frac{1}{X}$ y $X \to 0^-$, $U \to -\infty$

$$\lim_{U\to -\infty} \frac{1}{U^2}\left[\frac{\exp(U)}{1+\frac{1}{U^2}}\right] = \lim_{U\to -\infty} \frac{\exp(U)}{U^2+1}$$

$$\lim_{U\to -\infty} \frac{\exp(U)}{U^2+1} = 0$$

$$\text{“}\exp(-\infty)\text{”} = \frac{1}{\exp(\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{X\to -\infty} e^X = 0$$

la exp domina, en todo a los polinomios

b) Determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \exp(1/x)}{1+x^2}$$

si $u=\frac{1}{x}$, y $x\to\infty$, $u\to 0^+$

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u^2}\left[\frac{\exp(u)}{1+1/u^2}\right] = \lim_{u\to 0^+} \frac{\overbrace{\exp(u)}^{\to 1}}{\underbrace{1}_{\to 1}+\underbrace{u^2}_{\to 0}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 \exp(1/x)}{1+x^2}$$

si $u=\frac{1}{x}$, y $x\to-\infty$, $u\to 0^-$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u^2}\left[\frac{\exp(u)}{1+1/u^2}\right] = \lim_{u\to 0^-} \frac{\overbrace{\exp(u)}^{\to 1}}{\underbrace{1}_{\to 1}+\underbrace{u^2}_{\to 0}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

DEMOSTRANDO lo Pedido

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
2. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f.

Por y , 1 es AH.

(la recta $y = 1$)

Definición (Asíntotas verticales) Si $\lim\limits_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \bar{x}$ es una asíntota vertical de f.

POR , 0 es AV

(la recta $x = 0$)

P1. Para comenzar

Demuestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-e^{-\frac{1}{x^2}}) = 0$ y utilícelo para calcular la asíntota oblícua hacía $+\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[1-e^{-\frac{1}{x^2}}\right]$$

$\infty[1-1] = \infty\cdot 0$ indet !!

sea $u = -\frac{1}{x^2}$, si $x\to+\infty$, $u\to 0^-$

$$x^2 = -\frac{1}{u} = \frac{1}{-u} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{-u}} = \frac{1}{\sqrt{-u}}$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-u}}\left[1-e^u\right]$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1.$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{u}{\sqrt{-u}}\left[\frac{1-e^u}{u}\right]$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{-u}{\sqrt{-u}}\left[\frac{e^u-1}{u}\right]$$

$\sqrt{-u} = \frac{-u}{\sqrt{-u}}$

$(-u)^{1/2} = \frac{(-u)^1}{(-u)^{1/2}}$

$= (-u)^{1-1/2}$

$= (-u)^{1/2}$

$$\lim_{u\to 0^-} \sqrt{-u}\left[\frac{e^u-1}{u}\right] = 0\cdot 1 = 0$$

P1. Para comenzar

Demuestre que $\lim_{x\to+\infty} x(1-e^{-\frac{1}{x^2}}) = 0$ y utilícelo para calcular la asíntota oblícua hacía $+\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}$.

si la asíntota oblicua existe
y es de la forma $y = mx+n$
tenemos que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}}}{\frac{\cancel{x}}{1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{(1+e^{-\frac{1}{x^2}})} - \frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x - x(1+e^{-1/x^2})}{2(1+e^{-\frac{1}{x^2}})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x - x - xe^{-1/x^2}}{2(1+e^{-\frac{1}{x^2}})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - xe^{-1/x^2}}{2(1+e^{-1/x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{[x(1-e^{-\frac{1}{x^2}})] \to 0}{2(1+e^{-1/x^2}) \to 4}$$

$$4 = 2 \cdot \underbrace{1+1}_{2}$$

$$n = \frac{0}{4} = 0.$$

luego, la asíntota
oblicua es $y = mx+n$
con $m = \frac{1}{2}$ y $n = 0$.

P3. De examenes

Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{1+x^2})$.

a) Determine el dominio A de la función.

b) (Propuesto) Determine ceros, signos, paridad e imagen de f.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

d) (Propuesto) Estudie crecimiento y decrecimiento de f.

a) $x \in DOM(f) \iff \ln\left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right)$ es BD

$$\iff 1 - \frac{2}{1+x^2} > 0$$

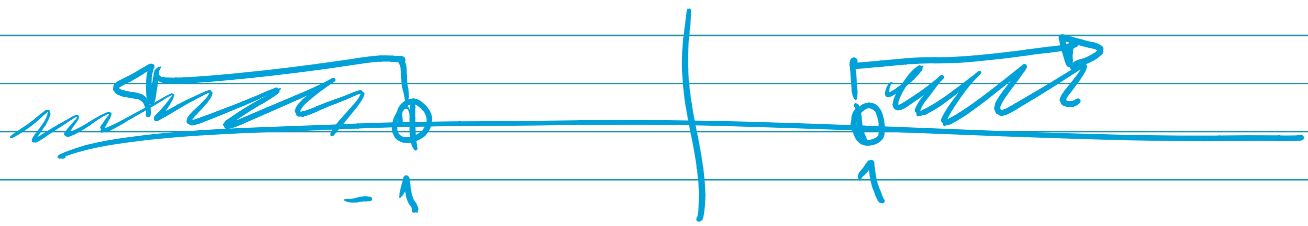
$$\iff 1 > \frac{2}{1+x^2}$$

$$\iff 1 + x^2 > 2$$

$$\iff x^2 > 1$$

$$\iff |x| > 1$$

$$DOM(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$$



P3. De examenes

Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{1+x^2})$.

a) Determine el dominio A de la función.

b) (Propuesto) Determine ceros, signos, paridad e imagen de f.

c) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

d) (Propuesto) Estudie crecimiento y decrecimiento de f.

AH : calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,

si f es par, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$,

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\Big(\underbrace{1 - \frac{\overset{0}{\cancel{2}}}{1+x^2}}_{1}\Big) = 0.$$

$\ln(1) = 0$

es necesario calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$??

NO pues f es par pues

$$f(-x) = \ln\left(1 - \frac{2}{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right) = f(x).$$

P3. De examenes

Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{1+x^2})$.

a) Determine el dominio A de la función. ✓

b) (Propuesto) Determine ceros, signos, paridad e imagen de f. ✓

c) Calcule límite cuando $x \to 1^+$ de $f(x)$. ✓

e) Identifique, de existir, asíntotas horizontales y verticales.

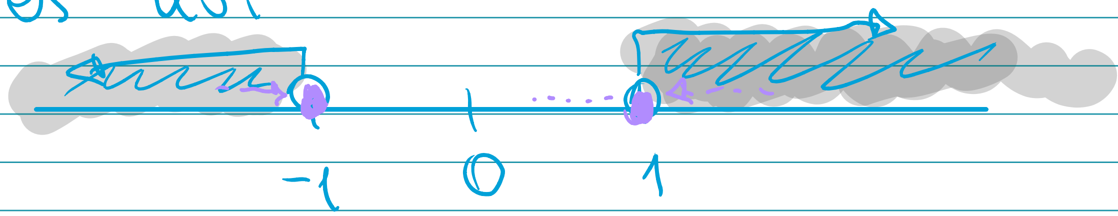
f) (Propuesto) Estudie crecimiento y decrecimiento de f.

1 es AV
$\Rightarrow -1$ es AV

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

$\boxed{AV}$ Los $\bar{x}$ tq $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \pm\infty$.

intuición: f es bonita, no se indefine en el interior de su dominio (ahí se deberían buscar primero asíntotas verticales) pero el dominio es así



luego, los buenos puntos donde buscar AV son -1^- y 1^+,

pero como f es par basta ver que pasa con

$\lim_{x\to1^+} f(x)$.

BASTA VERIFICAR

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} \ln\left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{2}{1+1}$$

$$\frac{2}{2}$$

$$1 - 1$$

$$\ln(0) = -\infty$$

como f es par

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x)$$ y son $= -\infty$

luego 1 y -1 son AV.