Auxiliar Extra Examen

Profesores: Matias Pavez Signe, Cristián Reyes
Auxiliares: Sebastián Gangas, Ignacio Díaz,
Gisela Abarca Andereya, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in A,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x \in A,\ x < 0 \end{cases}$$

- Determine A, ceros y signos de f.
- Determine, de existir, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
- Determine, de existir, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
- Concluya si hay, o no, asíntotas horizontales y verticales e identifíquelas

b) Calcule la asíntota oblícua hacia $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2} e^{\frac{1}{x}}$

c) Calcule todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x - |x|}$

P2. Matraca

Considere la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la recurrencia:

$$s_0 = e$$

$$s_{n+1} = \ln(s_n) + 1$$

a) Demuestre que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente

b) Demuestre $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por 1

c) Concluya que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y que su límite L satisface $e^{L-1} = L$

P3. De examenes

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+cos(n!)}\right)^{n}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{1+x^2}\right]$ donde $[u]$ denota la parte entera de u.

5. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Se define la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$v_n = \tfrac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{1+2+\ldots+n}$$

Pruebe que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada.

6. Use un cambio de variable apropiado y los límites conocidos para probar que

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e^{\frac{-1}{x^2}}\right)=0$$

Aproveche lo anterior, donde corresponda, para determinar la asíntota oblicua hacia $+\infty$, de la función definida por la ley

$$f(x)=\tfrac{x}{1+e^{\frac{-1}{x^2}}}$$

P4. De libro

a) Sean $a,b>0$, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor=\frac{b}{a}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\frac{b}{x}=0$. Discuta que ocurre con los límites por la izquierda

b) Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

c) Sean $0<x_1<y_1$. Para $n\geq 1$, definimos $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$. Demuestre que $\lim x_n=\lim y_n$