Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
26 de marzo de 2024

Auxiliar 2: Cuantificadores e inducción.

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Función proposicional]:** Una función proposicional $P(x)$ es una función que toma variables en un conjunto de referencia E. Esta función puede ser verdadera o falsa según la variable x que se fije.
- **[Cuantificador universal]:** Se denota $\forall$ y se lee "para todo". $\forall x \in E, P(x)$ es verdadera si al reemplazar x por cualquier elemento de E, se cumple $P(x)$.
- **[Contraejemplo]:** Un elemento $e \in E$ tal que $P(e)$ es falsa se denomina contraejemplo de $\forall x \in E, P(x)$
- **[Cuantificador existencial]:** Se denota $\exists$ y se lee "existe". $\exists x \in E, P(x)$ es verdad si hay algún elemento x en E tal que $P(x)$ se cumple.
- **[Existencia y unicidad]:** Se denota $\exists!$ y se lee "existe un único". $\exists! x \in E, P(x)$ es verdad si hay exactamente un elemento $x \in E$ tal que $P(x)$ se cumple.
- **[Principio de Inducción]:** Si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $p(n)$ es una función proposicional en el conjunto de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, entonces se tiene el **Principio de Inducción**, esto es, la siguiente proposición es una tautología:

$$[p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0, p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(n-1) \Rightarrow p(n))] \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0, p(n))$$

Débil: Donde ocupamos únicamente el caso inmediatamente anterior
Fuerte: Donde ocupamos más que solo el caso inmediatamente anterior.

P1. Determine el valor de verdad y luego niegue las siguientes proposiciones :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 < 0$
3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \leq y$

P2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R})\ x < z < y]$
2) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})\ x < z < y]$

Hint : $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

P3. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones :

1) Se cumple que, $\forall n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Demostración : Demostraremos por inducción.

[**Caso base**]: Veamos el caso base para $n_0 = 1$. El lado izquierdo queda $n_0^3 = 1$, mientras que el lado derecho queda $\left(\frac{n_0(n_0+1)}{2}\right)^2 = 1$. Luego, se cumple el caso base $n_0^3 = \left(\frac{n_0(n_0+1)}{2}\right)^2$.

[**Hipótesis inductiva**]: Tenemos que para algún n se cumple :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

[**Paso inductivo**]: Probemos con la hip. ind. que se cumple para $n+1$, es decir que se cumple

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Comenzaremos por el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{(Utilizando la hip. ind.)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido. Luego por inducción se cumple la propiedad $\forall n \geq 1$

2) $\forall n \geq 10$, se tiene que $n^3 < 2^n$

Demostración : Demostraremos por inducción. Primero veamos el caso base :

[**Caso base**]: Veamos el caso base para $n_0 = 10$. El lado izquierdo queda $n_0^3 = 1000$, mientras que el lado derecho queda $2^{n_0} = 1024$, por lo que se cumple $n_0^3 < 2^{n_0}$

[**Hipótesis inductiva**]: Suponemos que se cumple $n^3 < 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

[Paso inductivo]: Queremos probar que se cumple para $n+1$ utilizando la hipótesis inductiva. Buscamos probar que $(n+1)^3 < 2^{(n+1)}$. Partiremos por el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3+3n^2+3n+1\\ &\leq n^3+3n^2+3n^2+3n^2 = n^3+9n^2.\end{aligned}$$

Donde la desigualdad se obtiene gracias a que $n \leq n^2$ y $1 \leq 3n^2$. Utilizando además que $n \geq 10$ (por enunciado), entonces tenemos que $n > 9$. Con esto, obtenemos :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &\leq n^3+9n^2\\ &< n^3+n\cdot n^2\\ &= n^3+n^3\\ &= 2n^3 < 2\cdot 2^n = 2^{n+1}.\end{aligned}$$

En la última linea se utiliza la hipótesis inductiva. Con esto demostramos el paso inductivo. Luego por inducción se tiene lo pedido.

3) Demuestre que $8\cdot 7^n - 14$ es divisible por 21, para todo $n \geq 1$.

Observación: Ser divisible por 21 significa que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $8\cdot 7^n - 14 = 21k$
Demostración: Veamos por inducción.

[Caso Base]: Probemos que se cumple para $n_0 = 1$. Tenemos que $8\cdot 7 - 14 = 42 = 21\cdot 2$. Por lo que se cumple el caso base.

[Hipótesis inductiva]: Suponemos que para algún n se cumple que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $8\cdot 7^n - 14 = 21k$.

[Paso inductivo]: Queremos probar la proposición para $n+1$, es decir queremos probar $\exists \hat{k} \in \mathbb{N},\ 8\cdot 7^{n+1} - 14 = 21\hat{k}$. Demostremos lo anterior usando la hipótesis inductiva.

$$\begin{aligned}8\cdot 7^{n+1} - 14 &= 7\cdot 8\cdot 7^n - 14\\ &= 7\cdot 8\cdot 7^n - 7\cdot 14 + 7\cdot 14 - 14 && \text{(Nikita nipone con } 7\cdot 14)\\ &= 7(8\cdot 7^n - 14) + 7\cdot 14 - 14\\ &= 7\cdot 21k + 7\cdot 14 - 14 && \text{(Utilizando la hip. ind.)}\\ &= 7\cdot 21k + 6\cdot 14\\ &= 7\cdot 21k + 2\cdot 3\cdot 7\cdot 2\\ &= 7\cdot 21k + 21\cdot 4 = 21(7k+4).\end{aligned}$$

Definiendo $\hat{k} = 21(7k+4)$, podemos notar que $\hat{k} \in \mathbb{N}$ puesto que es multiplicación y suma de naturales. Con esto tenemos que $\exists \hat{k},\ 8\cdot 7^{n+1} - 14 = 21\hat{k}$, lo que demuestra el paso inductivo.
Luego por inducción, la proposición se tiene $\forall n \geq 1$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, 6^{2n+1} + 8^{2n}$ es divisible por 7.

Observación : Ser divisible por 7 significa que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $6^{2n+1} + 8^{2n} = 7k$
Demostración: Veamos por inducción.

[Caso Base]: Para $n_0 = 0$ tenemos :

$$6^{2n_0+1} + 8^{2n_0} = 6^1 + 8^0 = 6 + 1 = 7$$

Que es claramente divisible por 7.

[Hipótesis inductiva]: Para algún n, existe un k tal que $6^{2n+1} + 8^{2n} = 7k$.

[Paso inductivo]: Buscamos mostrar para $n+1$ (utilizando la hipótesis inductiva), es decir buscamos un $\hat{k} \in \mathbb{N}$ tal que $6^{2(n+1)+1} + 8^{2(n+1)} = 7\hat{k}$. Comenzemos por el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
6^{2(n+1)+1} + 8^{2(n+1)} &= 6^{2n+3} + 8^{2n+2} \\
&= 6^2 6^{2n+1} + 8^2 8^{2n} \\
&= 6^2 6^{2n+1} + 6^2 8^{2n} - 6^2 8^{2n} + 8^2 8^{2n} && \text{(Nikita nipone con } 6^2 8^{2n}\text{)} \\
&= 6^2(6^{2n+1} + 8^{2n}) + 8^{2n}(8^2 - 6^2) \\
&= 6^2 7k + 8^{2n}(64 - 36) && \text{(En este paso se utilizó la Hip. ind.)} \\
&= 6^2 7k + 28 \cdot 8^{2n} \\
&= 6^2 7k + 7 \cdot 4 \cdot 8^{2n} = 7 \cdot (6^2 k + 4 \cdot 8^{2n})
\end{aligned}$$

Denotemos $\hat{k} = 6^2 k + 4 \cdot 8^{2n}$. Notemos que $\hat{k} \in \mathbb{N}$ puesto que es multiplicación y suma de elementos en $\mathbb{N}$. Con esto tenemos $6^{2(n+1)+1} + 8^{2(n+1)} = 7\hat{k}$, lo cual era lo que buscábamos demostrar.
Luego, por principio de inducción, la proposición queda demostrada $\forall n \in \mathbb{N}$.

P4. Sea $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 1$. Considere la recurrencia dada por $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = (C-1)a_{n-1} + Ca_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Pruebe que :

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}$$

Demostración : Demostremos por inducción **fuerte**. Para la inducción fuerte necesitamos una hipótesis inductiva más amplia, en nuestro caso necesitamos que esta hipótesis se cumpla para n y $n-1$.

[Caso base]: Puesto que necesitamos dos términos para la inducción fuerte, probaremos para $n = 2$ y $n = 3$.

$$a_2 = (C-1)a_1 + Ca_0 = C - 1 = \frac{(C-1)(C+1)}{C+1} = \frac{C^2-1}{C+1} = \frac{C^2 - (-1)^2}{C+1}$$
$$a_3 = (C-1)a_2 + Ca_1 = (C-1)\frac{C^2-1}{C+1} + C = \frac{C^3 - C - C^2 + 1}{C+1} + \frac{C^2 + C}{C+1} = \frac{C^3+1}{C+1} = \frac{C^3 - (-1)^3}{C+1}$$

Por lo que tenemos los casos bases.

[Hipótesis inductiva]: Para algún n y $n-1$ se cumple :

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}, \quad a_{n-1} = \frac{C^{n-1} - (-1)^{n-1}}{C+1}$$

[Paso inductivo]: Con la hipótesis inductiva buscamos probar que $a_{n+1} = \frac{C^{n+1}-(-1)^{n+1}}{C+1}$. Partimos desde el lado izquierdo :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (C-1)a_n + Ca_{n-1} \\
&= (C-1)\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} + C\frac{C^{n-1} - (-1)^{n-1}}{C+1} \qquad \text{(Aquí se usa la hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{C^{n+1} - (-1)^n C - C^n + (-1)^n}{C+1} + \frac{C^n - (-1)^{n-1}C}{C+1} \\
&= \frac{C^{n+1} + (-1)^n - (-1)^n C - (-1)^{n-1}C}{C+1}
\end{aligned}$$

Notemos que $(-1)^{n-1} = -(-1)^n$ por lo que lo anterior queda :

$$a_{n+1} = \frac{C^{n+1} + (-1)^n - (-1)^n C + (-1)^n C}{C+1} = \frac{C^{n+1} + (-1)^n}{C+1}$$

Utilizando $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$ tenemos :

$$a_{n+1} = \frac{C^{n+1} - (-1)^{n+1}}{C+1}$$

Lo que prueba lo pedido. Luego, por inducción la propiedad se tiene $\forall n \geq 2$.

P5. **[Propuesto]** Observe que podemos descomponer los números $14, 15$ y 16 como suma de 3s y 8s:

$$\begin{aligned}
14 &= 3+3+8 \\
15 &= 3+3+3+3+3 \\
16 &= 8+8
\end{aligned}$$

Pruebe el resultado general, es decir, que $\forall n \geq 14$, n se puede escribir como suma de 3s y 8s.