Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
22 de abril de 2024

Auxiliar 6: Conjunto Imagen y Preimagen

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

Resumen

- **[Conjunto Imagen]:** Sea $f : A \to B$. Para $A' \subseteq A$ se define el conjunto imagen como :
$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$$
O equivalentemente :
$$y \in f(A') \iff \exists x \in A',\ f(x) = y$$
- **[Propiedades conjunto imagen]:** Sea $f : A \to B$. Sean $A_1, A_2 \subseteq A$, se tiene que :
  1. $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
  3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- **[Conjunto preimagen]:** Sea $f : A \to B$. Para $B' \subseteq B$ se define el conjunto preimagen como:
$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$
O equivalentemente:
$$x \in f^{-1}(B') \iff f(x) \in B'$$
- **[Propiedades conjunto preimagen]:** Sea $f : A \to B$. Sean $B_1, B_2 \subseteq B$, se tiene que :
  1. $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
  2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
  3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- **[Propiedades]:** Sea $f : A \to B$. Sean $A' \subseteq A,\ B' \subseteq B$, se tiene que :
  1. $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$. Con igualdad si f es inyectiva.
  2. $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$

P1. Sean $f, g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, dadas por $f(X) = X \backslash A,\ g(X) = X \cup A$. Muestre que :

a) $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$.
b) $g(\mathcal{P}(E)) = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subseteq X\}$

P2. Sean A, B conjuntos, $C \subseteq A,\ D \subseteq B$. Considere la función $f : A \times B \to A$ dado por $f(x, y) = x$

a) Demuestre que $f^{-1}(C) = C \times B$
b) Si $D \neq \emptyset$, demuestre que $f(C \times D) = C$

P3. Sean $A, B \subseteq E$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : E \to E$ una función.

a) Pruebe que : $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$
b) Pruebe que : f inyectiva $\implies f(A) \cap f(B) = \emptyset$
c) Pruebe que : f sobreyectiva $\implies f(A) \cup f(A^c) = E$

P4. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y $B_1, B_2 \subseteq f(A)$. Pruebe lo siguiente :

a) $B_1 \cup B_2 = f(A) \implies f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = A$
b) $B_1 \cap B_2 = \emptyset \implies f(f^{-1}(B_1)) \cap f(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$