P1) Sean $g, f: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$; $f(X) = X \setminus A$

$g(X) = X \cup A$

a) $f^{-1}(\{\phi\}) = \mathcal{P}(A)$

Dem) Por si solo si:

Sea $X \in f^{-1}(\{\phi\}) \iff f(X) \in \{\phi\}$ (def de f^{-1})

def def $\iff f(X) = \phi$

$\iff X \setminus A = \phi$

$\iff X \cap A^c = 0$

Prop Vista en Clases $\iff X \subseteq A \iff X \in \mathcal{P}(A)$

b) $g(\mathcal{P}(E)) = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq X\}$

Dem) definamos

$R = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq X\}$

Veamos por doble inclusión

$\subseteq$) PdQ) $g(\mathcal{P}(E)) \subseteq R$

Sea $Y \in g(\mathcal{P}(E)) \iff \exists X \in \mathcal{P}(E),\ g(X) = Y$

$\iff \exists X \in \mathcal{P}(E),\ X \cup A = Y$

• Por prop de la unión tenemos que $A \subseteq X \cup A$

Con lo anterior: $A \subseteq X \cup A = Y \Rightarrow \underline{A \subseteq Y}$

Por lo que $Y \in R$

$\supseteq$) PdQ $R \subseteq g(\mathcal{P}(E))$

• Sea $Y \in R \iff A \subseteq Y$ (Por def de R)

buscamos un $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $g(X) = Y$

↳ si Tomamos $X = Y \in \mathcal{P}(E)$ Tenemos que

$g(X) = X \cup A = Y \cup A = Y$

ya que $A \subseteq Y$

es decir, $\exists X \in \mathcal{P}(E),\ g(X) = Y$

$\iff Y \in g(\mathcal{P}(E))$

P2 Sean A, B tq $C \subseteq A, D \subseteq B$. Sea $f: A \times B \to A$ dada por $f(x,y) = x$.

a) Muestre que $f^{-1}(C) = C \times B$.

Dem) Por doble inclusión:

$\subseteq$) Pdq) $f^{-1}(C) \subseteq C \times B$

Queremos probar que si $(x_1, x_2) \in f^{-1}(C) \Rightarrow (x_1, x_2) \in C \times B$

Notemos que siempre se cumple que: $f^{-1}(C) \subseteq A \times B$

Por def de preimagen

así, si $(x_1, x_2) \in f^{-1}(C) \Rightarrow (x_1, x_2) \in A \times B$

$\Leftrightarrow x_1 \in A \wedge \boxed{x_2 \in B}$

- faltaría probar que $x_1 \in C$

$\hookrightarrow$ Sea $(x_1, x_2) \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x_1, x_2) \in C$ def de $f(x,y) = x$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1 \in C}$

así, tenemos que $x_1 \in C \wedge x_2 \in B \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in A \times B$ //

$\supseteq$) Pdq) $C \times B \subseteq f^{-1}(C)$

- Sea $(x_1, x_2) \in C \times B \Leftrightarrow x_1 \in C \wedge x_2 \in B$

así, $f(x_1, x_2) = x_1 \in C$

es decir, $f(x_1, x_2) \in C \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in f^{-1}(C)$ //

b) si $D \neq \emptyset \Rightarrow f(C \times D) = C$

Dem) Por doble inclusión:

$\subseteq$) Pdq $f(C \times D) \subseteq C$

Sea $y \in f(C \times D) \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in C \times D,\ f(x_1, x_2) = y$

$\Leftrightarrow \exists x_1 \in C \wedge \exists x_2 \in D,\ x_1 = y$

Como $y = x_1$ y $x_1 \in C \Rightarrow y \in C$ //

$\supseteq$) Pdq) $C \subseteq f(C \times D)$

Sea $y \in C$, buscamos $(x_1, x_2) \in C \times D$ tal que $f(x_1, x_2) = y$

- Como $y \in C$, podemos tomar $x_1 = y$
- Como $D \neq \emptyset$, podemos tomar $x_2 \in D$ cualquiera

así: $f(x_1, x_2) = x_1 = y \Leftrightarrow y \in f(C \times D)$ //

P3 | Sean $A, B \subseteq E$ tq $A \cap B = \phi$, $f: E \longrightarrow E$

a) Pruebe que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$

Dem | Por contradicción.

Sea $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$\iff x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$ $\quad$ ¿ def de f^{-1}

$\iff f(x) \in A \wedge f(x) \in B$

$\iff f(x) \in A \cap B = \phi$ $\quad$ (Hipótesis)

$\iff f(x) \in \phi$ $\quad$ $\rightarrow \leftarrow$

$\therefore f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$ //

b) f inyectiva $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \phi$

Dem | Por contradicción

Sea $y \in f(A) \cap f(B)$

$\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B)$ $\quad$ ¿ def de imágen

$\iff (\exists a \in A, f(a) = y) \wedge (\exists b \in B, f(b) = y)$

Tenemos entonces que $f(a) = y = f(b)$

$\Rightarrow f(a) = f(b)$

Por inyectividad entonces tenemos que $\boxed{a = b}$

Pero entonces $a \in A \wedge b \in B$

$\iff a \in A \wedge a \in B \iff a \in A \cap B = \phi$

$\iff a \in \phi$ $\quad$ $\rightarrow \leftarrow$

$\therefore f(A) \cap f(B) = \phi$

c) f sobreyectiva $\Rightarrow f(A) \cup f(A^c) = E$

Dem | Pdq $f(A) \cup f(A^c) = E$ por doble inclusión

$\subseteq$) Por def de imagen, siempre se tiene que

$f(A) \subseteq E$ y $f(A^c) \subseteq E$

$\Rightarrow f(A) \cup f(A^c) \subseteq E \cup E = E$

$\therefore f(A) \cup f(A^c) \subseteq E$ //

Escaneado con CamScanner

2|

Sea $y \in E$, buscamos probar que $y \in f(A) \cup f(A^c)$

- Por sobreyectividad tenemos que

$\exists x \in E$ tq. $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A \cup A^c,\ f(x) = y$) Pués $A \cup A^c = E$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A,\ f(x) = y) \vee (\exists x \in A^c,\ f(x) = y)$

$\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \quad \vee \quad y \in f(A^c)$

$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A^c)$ //

P4| $f: A \longmapsto B$ una función inyectiva, $B_1, B_2 \subseteq f(A)$.

a) $B_1 \cup B_2 = f(A) \Rightarrow f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = A$

Dem| Sale con puras propiedades

Tenemos que:

$$B_1 \cup B_2 = f(A) \overset{f^{-1}(\cdot)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(f(A))$$

$$\text{Por prop} \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(f(A))$$

Como f es inyectiva, por prop: $f^{-1}(f(A)) = A$

$\therefore f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = A$ //

b) $B_1 \cap B_2 = \phi \Rightarrow f(f^{-1}(B_1)) \cap f(f^{-1}(B_2)) = \phi$

Dem| Sale con puras props.

$$B_1 \cap B_2 = \phi \overset{f^{-1}(\cdot)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

$$\text{Prop.} \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \phi$$

$$\overset{f(\cdot)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)) = f(\phi) = \phi$$

$$\text{Prop:} \Leftrightarrow f(f^{-1}(B_1)) \cap f(f^{-1}(B_2)) = \phi$$ //