P1

a) $\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)$

Primero distribuimos

$$= \sum_{K=1}^{n-1} (K^2 - K)$$

la sumatoria separa las sumas y restas

$$= \sum_{K=1}^{n-1} K^2 - \sum_{K=1}^{n-1} K$$

cambiamos el indice partiendo de 0, ya que 0^2 y 0 no suman nada.

$$= \sum_{K=0}^{n-1} K^2 - \sum_{K=0}^{n-1} K$$

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

↳ se usaron las fórmulas de $\sum_{K=0}^{n-1} K^2$ y $\sum_{K=0}^{n-1} K$

b) $\sum_{K=3}^{n-1} (K-2)(K+1)$

distribuir

$$= \sum_{K=3}^{n-1} K^2 - K - 2$$

$$= \sum_{K=3}^{n-1} K^2 - \sum_{K=3}^{n-1} K - 2 \cdot \sum_{K=3}^{n-1} 1$$

Queremos usar las formulas para $\sum K^2$ y $\sum K$

Pero estas no parten de 0 -

↳ Podemos Hacer que comiezen de 0 y quitar los Términos extras.

- $\sum_{K=3}^{n-1} K^2 = \sum_{K=0}^{n-1} K^2 - \sum_{K=0}^{2} K^2 = \sum_{K=0}^{n-1} K^2 - (0^2+1^2+2^2) = \sum_{K=0}^{n-1} K^2 - 5$
- $\sum_{K=3}^{n-1} K = \sum_{K=0}^{n-1} K - \sum_{K=0}^{2} K = \sum_{K=0}^{n-1} K - (0+1+2) = \sum_{K=3}^{n-1} K - 3$

Además sabemos que $\sum_{K=3}^{n-1} 1 = (n-1-3+1) = n-3$

Reemplazando tenemos que:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 - 5 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} k - 3\right) - 2(n-3)$$

usando fórmulas:

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} - 5 - \left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} - 3\right) - 2(n-3)$$

c] $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 - k^2$

Si definimos $a_j = j-1$, tenemos que:

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^2 - a_{k+1}^2$$

Telescópica.

$$= a_0^2 - a_{n+1}^2$$

Como $a_j = j-1$ $\Rightarrow$ • $a_0 = 0-1 = -1$
• $a_{n+1} = n+1-1 = n$

Con esto:

$$= (-1)^2 - n^2 = 1 - n^2$$

d] $\sum_{k=m}^{n} (1 - 4 \cdot 2^k)$

$$= \sum_{k=m}^{n} 1 - \sum_{k=m}^{n} 4 \cdot 2^k$$

fórmula para $\sum_{k=m}^{n} 1$

$$= (n-m+1) - 4 \sum_{k=m}^{n} 2^k$$

Queremos usar la fórmula para $\sum 2^k$, pero debe comenzar desde $k=0$

Sumamos extra y restamos!

• $\sum_{k=m}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-2^{m-1+1}}{1-2}$

$$= -(1-2^{n+1}) + (1-2^m)$$
$$= 2^{n+1} - 2^m$$

Reemplazando obtenemos:

$$\sum_{k=m}^{n} 2^k = (n-m+1) - 4\cdot(2^{n+1} - 2^m)$$

e) $\sum_{k=n}^{m} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Sumando dentro del log.

$$= \sum_{k=n}^{m} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Propiedad del log.

$$= \sum_{k=n}^{m} \log(k+1) - \log(k)$$

Telescópica.

$$= \log(m+1) - \log(n)$$

P2)

a) Calcule lo sig. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} 3^k$

Primero: Desarmar todo lo de adentro.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} 3^k$$

def de $\binom{n}{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} \cdot 3^k$$

Sabemos que $k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\ldots = k\cdot(k-1)!$

agrupando:

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!} \cdot 3^k$$

Queremos armar una Combinatoria donde la parte de abajo sea k.

↳ Notemos que $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

Si: Hacemos un NIKITA NIPONE con $n+1$ tenemos

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!} \cdot 3^k$$

agrupando:

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot 3^k$$

def de $\binom{n+1}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot 3^k$$

Podemos sacar $\frac{1}{n+1}$ pues no depende de k.

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k$$

Queremos usar el Teo. del Binomio:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

Pero Hay dos Problemas;

Problema 1| si $a=3$, falta el otro término b Para poder usar el Teorema.

↳ Podemos usar $b=1$ ya que no cambia en nada el problema

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k \cdot 1^{n+1-k}$$

elevamos por el término conveniente.

Problema 2| los índices deberían ir desde $k=0$ Hasta $k=n+1$

↳ Podemos sumar estos índices y luego restarlos.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k 1^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^k 1^{n+1-k} - \binom{n+1}{0} 3^0 - \binom{n+1}{n+1} 3^{n+1}$$

Término $k=0$ — Término $k=n+1$

como $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ y usando Teo. del Binomio, Tenemos

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot 3^k = \frac{1}{n+1} \left\{ (3+1)^{n+1} - 1 - 3^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left\{ 4^{n+1} - 1 - 3^{n+1} \right\}$$

Escaneado con CamScanner

P3 | Demuestre que $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k-1)$$

• Por inducción:

Caso Base : $n = 1$

$$\cdot \sum_{k=1}^{2\cdot 1} (-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 + (-1)^2 2^2$$
$$= -1 + 4\cdot 1 = 4\cdot 1 - 1$$
$$= \sum_{k=1}^{1} (4k-1) \quad //$$

Hipótesis | $\exists n \in \mathbb{N}$ tq.

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k-1)$$

PI | Queremos Probar : $\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (4k-1)$

Comencemos del lado Izq.

$$\cdot \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k^2$$

Tenemos una suma Hasta $2n+2$, Podemos sumar Hasta $2n$ y sumar "manualmente" $2n+1$ y $2n+2$

$$= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k 2^k + (-1)^{2n+1} (2n+1)^2 + (-1)^{2n+2} (2n+2)^2$$

Hipótesis

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) - (2n+1)^2 + (2n+2)^2$$

No desarmemos la sumatoria, desarrollemos lo otro:

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) - (4n^2 + 2n + 1) + (4n^2 + 8n + 4)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) + 4n + 3$$

Si escribimos $3 = 4 - 1$

$$\Rightarrow = \sum_{k=1}^{n} (4k-1) + 4n + 4 - 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) + \underbrace{\{4(n+1) - 1\}}$$

esto tiene la forma $4k-1$

con $k = n+1$ -> lo metemos a la Sumatoria!

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (4k-1)$$