Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
25 de junio de 2024

Auxiliar Movilizado/Extra Control 5

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

P1. Determine si los siguientes conjuntos son numerables:

a) $A = \{..., -9, -4, -1, 1, 4, 9, ...\}$

b) $B = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

c) $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a + b + c = 5\}$

P2. Muestre lo siguiente:

a) Sea $(G, *)$ una estructura asociativa, con neutro e inverso $\forall g \in G$. Sea $f : G \to G$ definida por $f(g) = g^{-1}$. Muestre que:

$$f \text{ es automorfismo en } (G.*) \iff (G, *) \text{ es conmutativa.}$$

b) En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ se define la l.c.i. $*$ como :

$$([n]_3, m) * ([i]_3, j) = ([n + i]_3, m + j)$$

Sea además $\phi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo sobreyectivo entre $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$

1) Muestre que $\phi([1]_3, 0) = 0$.
Hint: Calcule $\phi(([1]_3, 0) * ([1]_3, 0) * ([1]_3, 0))$

2) Concluya que $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ no son isomorfos.

P3. [Propuesto]: Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con $a^{-1} \in S$, definimos la nueva operación $\triangle$, en S, dada por:

$$x \triangle y = x * a * y$$

a) Demuestre que $(S, \triangle)$ es una estructura algebraica.

b) Demuestre que $\triangle$ es asociativa.

c) Determine si $\triangle$ tiene neutro y cálculelo en caso de existir.

d) Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$, y calcule el inverso de a con respecto a $\triangle$.

P4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + \frac{1}{a^n}}$, con $a > 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor \alpha k^2 \rfloor}{n^3}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, con $a < b$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^n$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\left(\dfrac{an+1}{2n}\right)^n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{n^6 4^n}$.

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^n$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.

P5. Dado $a \in (0,1)$, considere la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la recurrencia $s_0 = a$ y $s_{n+1} = 2s_n - s_n^2$.

a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq 0$.

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq 1$.

c) Demuestre que s_n es creciente.

d) Demuestre que s_n converge y calcule su límite.

P6. [**Propuesto**] Considere la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por $u_0 = 5$ y $u_{n+1} = 5 - \frac{6}{u_n}$.

a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.

b) Demuestre que u_n es decreciente.

c) Demuestre que u_n converge y calcule su límite.