Control 2 recuperativo

P1. Para cada $a \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto de los múltiplos de a como

$$M_a = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = a \cdot k\}.$$

Muestre que:

a) (2.0 ptos) Para todo $a, b \in \mathbb{N}$ se tiene que $M_{a \cdot b} \subseteq M_a \cap M_b$.

Solución: Para un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, tenemos que demostrar que si n pertenece a $M_{a \cdot b}$, entonces n pertenece a M_a [**0.5 ptos**]. En efecto,

$$\begin{aligned} n \in M_{a \cdot b} &\iff \exists k \in \mathbb{N},\, n = (a \cdot b) \cdot k, && \text{(por definición de } M_{a \cdot b}\text{)} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N},\, n = a \cdot (b \cdot k), \\ &\implies \exists k' = b \cdot k,\, n = a \cdot k', && \text{([}\textbf{0.7 por notar esto e identificar } k'\text{])} \\ &\iff n \in M_a, && \text{(por definición de } M_a\text{)} \end{aligned}$$

Sigue que $M_{a \cdot b} \subseteq M_a$. Análogamente (intercambiando a por b) se obtiene que $M_{a \cdot b} \subseteq M_b$ [**0.3 ptos. por hacer el caso de** b].
Por propiedad conocida (específicamente que $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \implies A \subseteq B \cap C$) se concluye que $M_{a \cdot b} \subseteq M_a \cdot M_b$ [**0.5 ptos. por concluir**].

Indicaciones para la corrección:

- Los estudiantes pueden decir que si n es múltiplo de $a \cdot b$ entonces es múltiplo de a y es múltiplo de b. Si no hay demostración de esto el máximo de la pregunta es 1.5 ptos.

b) (2.0 ptos) Existen $a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ con $a \neq b$ tal que $M_a \cap M_b \neq M_{a \cdot b}$.

Solución: Bastará exhibir valores de $a, b \notin \{0, 1\}$ y un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \notin M_{a \cdot b}$ y $n \in M_a \cdot M_b$ (pues esto impica que $M_{a \cdot b} \neq M_a \cap M_b$) [**0.5 ptos. por notar qué hay que demostrar**].
Sean $a = 2$ y $b = 4$ [**1.0 ptos. por escoger los buenos** a **y** b]. Claramente $M_{a \cdot b} = M_8$ es el conjunto de enteros no-negativos múltiplos de 8. Como $n = 4$ no es múltiplo de 8, sigue que $4 \notin M_8$.
Por otro lado, el número 4 pertenece tanto a M_2 como M_4, por lo que $M_{a \cdot b} \neq M_a \cap M_b$. [**0.5 ptos. por concluir**]

Indicaciones para la corrección:

- Basta tomar dos números a, b cuyo mínimo común múltiplo sea estrictamente menor que $a \cdot b$.

c) (2.0 ptos) $\bigcup_{p \in P} M_p = \mathbb{N} \backslash \{1\}$, donde $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ es primo}\}$. (Recuerde que 1 no es primo).

Solución: Demostrar que $\cup_{p \in P} M_p = \mathbb{N}$ es equivalente a probar que $n \in \cup_{p \in P} M_p$ si y sólo si $n \in \mathbb{N}$.
($\Longrightarrow$) Basta observar que:

$$\begin{aligned} n \in \bigcup_{p \in P} M_p &\iff \exists p \in P, n \in M_p, \\ &\qquad \text{(por definición de unión sobre conjunto de índices } [\mathbf{0.3\ puntos}]) \\ &\Longrightarrow \exists p \in P, n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, \qquad \text{(porque } M_p \subseteq \mathbb{N} \backslash \{1\} \ [\mathbf{0.3\ puntos}]) \\ &\iff n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, \qquad \text{(por propiedad de cuantificadores } [\mathbf{0.2\ puntos}]) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Consideramos dos casos dependiendo si $n = 0$ o $n \geq 2$.
Si $n = 0$, entonces $n \in M_p$ cualquiera sea $p \in P$ (porque $0 = p \cdot k$ con $k = 0 \in \mathbb{N}$) [**0.3 ptos. por el caso** $n = 0$].
Por otro lado,

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} &\Longrightarrow \exists p \in P, p \text{ divide a } n, \\ &\qquad \text{(porque todo } n \geq 2 \text{ es divisible por un primo } [\mathbf{0.3\ puntos}]) \\ &\iff \exists p \in P, n \text{ es múltiplo de } p, \\ &\qquad \text{(porque } p \text{ divide a } n \text{ ssi } n \text{ es múltiplo de } p) \\ &\iff \exists p \in P, n \in M_p, \qquad \text{(por definición de } M_p \ [\mathbf{0.3\ puntos}]) \\ &\iff n \in \bigcup_{p \in P} M_p, \\ &\qquad \text{(por definición de unión sobre conjunto de índices } [\mathbf{0.3\ puntos}]) \end{aligned}$$

Indicaciones para la corrección:

- Notar que si un estudiante olvida el caso $n = 0$ se le sustraen 0.3 puntos.
- Para pasar de que p divide a n a que $n \in M_p$ los estudiantes no deben justificar mucho. Basta que muestre que comprenden qué es M_p.
- Notar que conocer la definición de la unión sobre conjuntos arbitrarios da 0.3 ptos. en $\Longrightarrow$ y 0.3 ptos. en $\Longleftarrow$.

P2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f^k(n) = n.$$

Es decir, cada número $n \in \mathbb{N}$ tiene asociado un $k \geq 1$ (que depende de n) que cumple que $f^k(n) = n$.

Nota: Recuerde que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k \text{ veces}}$. Formalmente, $f^1 = f$ y para todo $k > 1$, $f^k = f^{k-1} \circ f$.

a) (3.0 pts) Demuestre que f es sobreyectiva (Ind: Para n, considerar $f^{k-1}(n)$).

Solución: Queremos demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = n$ [**0.8 ptos. por dar/usar definición**].
Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^k(n) = n$ (dicho k existe por hipótesis). Luego,

$$f(f^{k-1}(n)) = f^k(n) = n. \quad (\textbf{[1.2 ptos. por observar que } f^k = f \circ f^k \textbf{ y evaluar en } n\textbf{]})$$

Sigue que si $m = f(n)$, entonces $f(m) = n$ [**1.0 ptos. por dar m, i.e., una preimagen de n**]. Esto prueba que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = n$, como se buscaba.

b) (3.0 pts) Demuestre que f es inyectiva (Ind: para $n, m \in \mathbb{N}$ considerar algún K común tal que $f^K(n) = n$ y $f^K(m) = m$).

Solución: Queremos demostrar que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, si $f(n) = f(m)$, entonces $n = m$ [**0.5 ptos. por dar/usar definición**].
Probemos primero la indicación. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que $f(n) = f(m)$. Por hipótesis, existen $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $f^k(n) = n$ y $f^\ell(m) = m$. Luego, [**0.5 ptos. por observar y usar que si $m \geq k$, entonces $f^m(n) = f^{m-k}(n)$**].

$$\begin{aligned} f^{k\cdot\ell}(n) &= f^{k\cdot(\ell-1)+k}(n) \\ &= f^{k\cdot(\ell-1)}(f^k(n)) \\ &= f^{k\cdot(\ell-1)}(n). \end{aligned}$$

Iterando, [**0.5 ptos. por iterar y concluir que $f^{k\cdot\ell}(n) = n$**]

$$f^{k\cdot\ell}(n) = f^{k\cdot(\ell-1)}(n) = f^{k\cdot(\ell-2)}(n) = ... = f^{k\cdot 2}(n) = f^k(n) = n.$$

De manera análoga (reemplazando n por m e intercambiando k y ℓ), se tiene que $f^{k\cdot\ell}(m) = m$.
[**0.5 ptos. por probar que $f^{k\cdot\ell}(m) = m$ o decir que es similar al caso anterior**]

La discusión previa establece la indicación, dado que $K = k \cdot \ell$ cumple que $f^K(n) = n$ y $f^K(m) = m$.

Para concluir que f es inyectiva, observar que

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) &\implies f^{K-1}(f(n)) = f^{K-1}(f(m)) \\ &\qquad\qquad \text{(evaluando } f^{K-1} \text{ en } f(n) = f(m) \textbf{ [0.5 ptos.]}) \\ &\iff f^K(n) = f^K(m) \qquad \text{(def. de } \circ) \\ &\iff n = m. \qquad \text{(por indicación)} \end{aligned}$$

[**0.5 ptos. por invocar/aplicar la definición de inyectividad y concluir correctamente.**]

Indicaciones para la corrección:

- Decir que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ es incorrecto pues ello involucra asumir que existe un mismo entero k que independiente de n satisface que $f^k(n) = n$. Luego, usar que $f \circ f^{k-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ para deducir inyectividad de f no está bien. Asignar 0.8 ptos. si usan este argumento.

Duración: 1 hora y 15 minutos.