Control 3 (Recuperación)

P1. Diremos que una relación $\mathcal{S}$ en un conjunto A es *cíclica* si para todo $x, y, z \in A$, $x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z \implies z\mathcal{S}x$.

a) **(3 ptos.)** Demuestre que la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ dada por $x\mathcal{R}y \iff y - x \equiv_3 2$ es cíclica.

Solución: Primero notemos que, para $x, y \in \mathbb{Z}$ cualquiera,

$$x\mathcal{R}y \iff y - x \equiv_3 2 \iff y - x - 2 = 3k, \text{ para } k \in \mathbb{Z}. \quad \textbf{(1 pto.)}$$

Sean ahora $x, y, z \in \mathbb{Z}$ cualquiera, y supongamos que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$. Esto significa que $y - x - 2 = 3k \wedge z - y - 2 = 3l$, para $k, l \in \mathbb{Z}$.

Como queremos concluir que $z\mathcal{R}x$, debemos armar la resta $x - z - 2$. Para acercarnos a ello sumamos las dos expresiones anteriores, lo que nos da $y - x - 2 + z - y - 2 = 3k + 3l$, esto es, $z - x - 4 = 3(k + l)$, de donde $x - z + 4 = -3(k + l)$. **(1 pto.)**

Así $x - z - 2 = 3(-k - l - 2)$, y como $-k - l - 2 \in \mathbb{Z}$, deducimos que $z\mathcal{R}x$, de donde $\mathcal{R}$ es cíclica. **(1 pto.)**

Indicaciones corrección.

- Los estudiantes pueden realizar los cálculos en distintos órdenes, por tanto es necesario recurrir al buen juicio para asignar los puntajes de modo que se correspondan a los indicados en esta pauta. Por ejemplo, podrían no mostrar la primera equivalencia en general, pero si los cálculos correspondientes aparecen de algún modo en su desarrollo, se debe asignar de igual forma ese primer punto.
- Si bien en el momento en que se rindió el control 3 no se había cubierto en el curso el que las congruencias se pueden sumar y multiplicar, ahora sí es algo que podemos presumir como conocido por los estudiantes, por tanto es perfectamente aceptable un argumento del tipo: Si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, entonces $y - x \equiv_3 2 \wedge z - y \equiv_3 2$, y como las congruencias se pueden sumar, se tiene que $z - x = (z - y) + (y - x) \equiv_3 2 + 2 \equiv_3 1$, por lo cual $x - z = -(z - x) \equiv_3 -1 \equiv_3 2$, de donde $z\mathcal{R}x$. Este argumento debiese llevar todo el puntaje de la parte a).

b) **(3 ptos.)** Demuestre que $\mathcal{S}$ es cíclica y refleja $\iff$ $\mathcal{S}$ es relación de equivalencia.

Solución: Demostremos la equivalencia con dos implicaciones:

- Si $\mathcal{S}$ es cíclica y refleja, entonces $\mathcal{S}$ es relación de equivalencia:
  Como por hipótesis $\mathcal{S}$ es refleja, sólo resta probar que es simétrica y transitiva. **(0.5 ptos.)**

  $\mathcal{S}$ es simétrica: Sean $x, y \in A$ cualquiera tales que $x\mathcal{S}y$. Como por hipótesis $\mathcal{S}$ es refleja, sabemos que $y\mathcal{S}y$. Podemos tomar entonces $z = y$ en la definición de la propiedad cíclica, y concluimos que como $x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}y$, entonces $y\mathcal{S}x$, lo que nos da la simetría de $\mathcal{S}$. **(0.5 ptos.)**

  $\mathcal{S}$ es transitiva: Sean $x, y, z \in A$ cualquiera tales que $x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z$. Como $\mathcal{S}$ es cíclica, entonces $z\mathcal{S}x$. Pero como ya se probó que $\mathcal{S}$ es simétrica, se obtienes que $x\mathcal{S}z$, lo que prueba la transitividad de $\mathcal{S}$. **(0.5 ptos.)**

- Si $\mathcal{S}$ es relación de equivalencia, entonces $\mathcal{S}$ es cíclica y refleja:
  Como $\mathcal{S}$ es de equivalencia, ya tenemos que es refleja. Sólo resta mostrar que es cíclica. **(0.5 ptos.)**

Sean $x, y, z \in A$ cualquiera tales que $x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z$. Como $\mathcal{S}$ es transitiva, entonces $x\mathcal{S}z$, y como también es simétrica, entonces $z\mathcal{S}x$. Por lo tanto $\mathcal{S}$ es cíclica. **(1 pto.)**

P2. Sea A un conjunto y $f\colon A \to A$ una función tal que para todo $x \in A, f(f(x)) = f(x)$.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que para todo $B \subseteq A$, $f(f(B)) = f(B)$.

Solución: Sea $z \in A$ un elemento cualquiera. Mostremos que $z \in f(f(B)) \iff z \in f(B)$. **(0.5 ptos.)**

Por definición de imagen, $z \in f(f(B)) \iff \exists y \in f(B), z = f(y)$. **(0.5 ptos.)**

Pero, nuevamente por definición de imagen, $y \in f(B) \iff \exists x \in B, y = f(x)$. Reemplazando en la equivalencia anterior, $z \in f(f(B)) \iff \exists x \in B, z = f(f(x))$. **(0.5 ptos.)**

Finalmente, como $f(f(x)) = f(x)$, resulta que $z \in f(f(B)) \iff \exists x \in B, z = f(x) \iff z \in f(B)$. **(0.5 ptos.)**

Indicaciones corrección. El problema también se puede resolver usando dos implicaciones (o, equivalentemente, mostrando que $f(f(B)) \subseteq f(B) \wedge f(B) \subseteq f(f(B))$). Los argumentos son similares.

b) i) **(1 pto.)** Sean $x, y \in A$ tales que $f(y) = x \wedge f(x) = y$. Demuestre que $f(y) = f(x)$ y deduzca que $x = y$.

Solución: Evaluando f en los dos elementos iguales $f(y)$ y x, resulta que $f(f(y)) = f(x)$, y como por la condición que satisface f, $f(f(y)) = f(y)$, resulta que $f(y) = f(x)$, que es lo primero que se pide demostrar. **(0.5 ptos.)**

Con esto se obtiene que $x = f(y) = f(x) = y$, con lo que $x = y$. **(0.5 ptos.)**

Indicaciones corrección. Tener en cuenta que, por supuesto, la presentada no es la única forma de hacerlo, por ejemplo, $f(y) = f(x)$ se puede obtener también evaluando f en la igualdad $f(x) = y$.

ii) **(1 pto.)** Sean $x, y, z \in A$ tales que $f(y) = x \wedge f(z) = y$. Demuestre que $f(z) = x$.

Solución: Evaluando f en la igualdad $f(z) = y$, se obtiene $f(f(z)) = f(y)$, lo que, por la condición que satisface f, implica que $f(z) = f(y)$. **(0.5 ptos.)**

El resultado pedido se obtiene entonces usando la igualdad $f(y) = x$. **(0.5 ptos.)**

c) **(2 ptos.)** Sea $\mathcal{R}$ la relación en A dada por $x\mathcal{R}y \iff f(y) = x$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es antisimétrica y transitiva.

Indicación: Puede usar la parte b).

Solución:

- $\mathcal{R}$ es antisimétrica: Sean $x, y \in A$ cualquiera, tales que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$. Por definición de $\mathcal{R}$, esto significa que $f(y) = x \wedge f(x) = y$. **(0.5 ptos.)**
  Utilizando b)i) se deduce que $x = y$, y por lo tanto $\mathcal{R}$ es antisimétrica. **(0.5 ptos.)**
- $\mathcal{R}$ es transitiva: Sean $x, y, z \in A$ cualquiera, tales que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$. Por definición de $\mathcal{R}$, esto significa que $f(y) = x \wedge f(z) = y$. **(0.5 ptos.)**
  Utilizando b)ii) se deduce que $f(z) = x$, lo que equivale a $x\mathcal{R}z$, y por lo tanto $\mathcal{R}$ es transitiva. **(0.5 ptos.)**

Duración: 1h y 30 minutos.