Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2024
1 de Julio

PAUTA CONTROL 1 RECUPERATIVO

P1. *a)* (3 ptos.) Sean p, q y r proposiciones. Demostrar, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es tautología

$$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Longrightarrow \overline{(p \wedge r)}]. \tag{1}$$

Solución

Para probar lo propuesto comenzaremos usando la tautología: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \overline{a} \vee b$, para a, b proposiciones, que se trata de una caraterización de la implicación a la cual nos referimos cuando se aplique por $*$. Luego esto en (1) nos conduce a

[0,6 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad \overline{(\overline{p} \vee q)} \vee [\,\overline{\overline{(q \wedge r)}} \vee \overline{(p \wedge r)}\,]$ $\leftarrow$ por $*$ 3 veces
[0,4 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad (p \wedge \overline{q}) \vee [(q \wedge r) \vee (\overline{p} \vee \overline{r})]$ $\leftarrow$ morgan y doble negación
[0,4 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad [\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q})] \vee [\overline{r} \vee (q \wedge r)]$ $\leftarrow$ asociando y conmutando
[0,4 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad [(\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})] \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge (\overline{r} \vee r)]$ $\leftarrow$ distribuyendo 2 veces
[0,4 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad [V \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})] \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge V]$ $\leftarrow$ tercio exclusivo 2 veces
[0,4 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad \overline{p} \vee \overline{r} \vee \overline{q} \vee q$ $\leftarrow$ identidad (o reducción) y conmutando
[0,2 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad \overline{p} \vee \overline{r} \vee V$ $\leftarrow$ 3er excluído o tercio exclusivo
[0,2 pts] $\rightarrow \Leftrightarrow \quad V$ $\leftarrow$ dominancia (o reducción) ✓.

Comentarios para corrección

Hay otras maneras de abordar esta tautología, entre ellas
• Probar que la contrarecíproca de (1) es tautología con un procedimiento análogo al presentado arriba, en tal caso asignar los puntajes de la misma manera.
• Demostrar que la negación de (1) es falsa, ello requiere aplicar tautologías conocidas como en la solución mostrada en este texto.
• Usar un método exploratorio o de inspección, en el cual se descarta que no se da el único caso donde una implicación $a \Rightarrow b$ es falsa.

b) (3 ptos.) Sean p, q, r y s proposiciones cuyos valores de verdad hacen que la siguiente proposición sea falsa

$$\overline{q} \vee [(r \Longleftrightarrow s) \Longrightarrow p]. \tag{2}$$

Considerando lo anterior, demuestre que la siguiente proposición es verdadera

$$[\overline{p} \wedge (\overline{r} \vee \overline{s})] \Longrightarrow [(r \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (q \wedge \overline{s})]. \tag{3}$$

Solución

Dado que (2) es falsa implica que $\overline{q} \Leftrightarrow F$ y $[(r \Longleftrightarrow s) \Longrightarrow p] \Leftrightarrow F$ $\leftarrow$ [0,5 pts], luego $q \Leftrightarrow V$, $(r \Longleftrightarrow s) \Leftrightarrow V$ y $p \Leftrightarrow F$ $\leftarrow$ [0,5 pts]. Con ello tenemos dos casos

1) r y s falsas $\leftarrow$ [0,5 pts].

2) r y s verdaderas $\leftarrow$ [0,5 pts].

Veamos que en cada caso (3) es verdadera, en el primero tenemos

$$\begin{aligned}
&[\overline{p} \wedge (\overline{r} \vee \overline{s})] \Longrightarrow [(r \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (q \wedge \overline{s})] \\
&\Leftrightarrow [\overline{F} \wedge (\overline{F} \vee \overline{F})] \Longrightarrow [(F \Longrightarrow \overline{F}) \wedge (V \wedge \overline{F})] \leftarrow \text{[0,2 pts]} \\
&\Leftrightarrow V \Longrightarrow [V \wedge V] \leftarrow \text{[0,2 pts]} \\
&\Leftrightarrow V \leftarrow \text{[0,1 pto].}
\end{aligned}$$

Mientras que en el segundo

$$\begin{aligned}
&[\overline{p} \wedge (\overline{r} \vee \overline{s})] \Longrightarrow [(r \Longrightarrow \overline{p}) \wedge (q \wedge \overline{s})] \\
&\Leftrightarrow [\overline{F} \wedge (\overline{V} \vee \overline{V})] \Longrightarrow [(V \Longrightarrow \overline{F}) \wedge (V \wedge \overline{V})] \leftarrow \text{[0,2 pts]} \\
&\Leftrightarrow F \Longrightarrow [V \wedge F] \leftarrow \text{[0,2 pts]} \\
&\Leftrightarrow V \leftarrow \text{[0,1 pto].}
\end{aligned}$$

Siendo verdadera en ambos casos, como se quería probar.

P2. *a*) (3 ptos.) Escriba la negación y determine el valor de verdad de la siguiente proposición

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x \text{ divide a } y \vee x \cdot y \text{ es impar.} \tag{4}$$

Solución

Consideremos la función proposicional $p(x, y) : x$ divide a $y \vee x \cdot y$ es impar, luego su negación $\overline{p(x, y)} \Leftrightarrow \overline{x \text{ divide a } y} \wedge \overline{x \cdot y \text{ es impar}} \Leftrightarrow x$ no divide a $y \wedge x \cdot y$ es par $\leftarrow$ [1 pto]. Ahora la negación de (4) es

$$\begin{aligned}
&\overline{\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, p(x, y)} \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}\ \overline{p(x, y)} \leftarrow \text{[0,5 pts]} \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}\ x \text{ no divide a } y \wedge x \cdot y \text{ es par} \leftarrow \text{[0,5 pts].}
\end{aligned}$$

Finalmente (4) es falsa pues $p(0, y)$ es falsa para cualquier y entero $\leftarrow$ [1 pto].

Comentarios para corrección

Equivalente para x no divide a y es válido también $y \neq kx$ para cualquier k entero y para $x \cdot y$ es par escribir $x \cdot y = 2a$ con a entero.

b) (3 ptos.) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de números reales definida por la recurrencia

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ \frac{3}{4 - a_{n-1}}, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostrar por inducción que $a_n = \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución

Definiendo la función proposicional $p(n)$: $a_n = \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1} \leftarrow$ [0,5 pts], se debe probar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$. Verifiquemos el caso base, es decir $p(0)$, en tal caso $a_0 = \frac{3(3^0-1)}{3^{0+1}-1} = \frac{3(1-1)}{3-1} = 0$, luego $p(0)$ es cierto $\leftarrow$ [0,5 pts]. Verifiquemos ahora el paso inductivo, suponemos para un n $p(n)$ (H.I) y probemos $p(n+1)$, en efecto usando la fórmula recursiva dada se tiene

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{4-a_n} \underbrace{=}_{(H.I)} \frac{3}{4-\frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}} = \frac{3(3^{n+1}-1)}{4\cdot 3^{n+1}-4-3^{n+1}+3} \leftarrow [1 \text{ pto}] \\ &= \frac{3(3^{n+1}-1)}{3\cdot 3^{n+1}-1} = \frac{3(3^{n+1}-1)}{3^{n+2}-1} \leftarrow [0{,}5 \text{ pts}]. \end{aligned}$$

Luego por principio de inducción se cumple $a_n = \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \leftarrow$ [0,5 pts].

Comentarios para corrección

Los manejos algebraícos del paso inductivo pueden ser distintos al mostrado, de estar correctos y se concluye lo que corresponda se debe asignar el respectivo puntaje involucrado. También el paso inductivo puede ser $p(n-1) \Rightarrow p(n)$ para $n \geq 1$ o $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ para un k arbitrario entero positivo, etc.